УДК 164.07
DOI 10.25205/2541-7517-2020-18-3-132-143

Еще раз о неверных истолкованиях второй теоремы Гёделя о неполноте

А. В. Бессонов

Институт философии и права СО РАН
Новосибирск, Россия

Аннотация

Дается ответ на статью А. М. Измайловой (Измайлова А. М. О критике теоремы К. Гёделя о неполноте А.В. Бессоновым // Студенческий научный журнал «Грани науки». 2018. Т. 6. № 1. С. 7–9), якобы указывающей на «серьезную ошибку» в моем анализе второй теоремы К. Гёделя о неполноте. Показано, что ее критика основана на грубых логических ошибках, а также на неверном понимании как второй теоремы о неполноте, так и моих результатов. В основе подобной распространенной ошибочной интерпретации лежит недопустимое смешение доказательства непротиворечивости формальной арифметики с доказательством в ней формулы, выражающей ее непротиворечивость. Аргументировано, что вторая теорема Гёделя не имеет прямой связи с доказательством непротиворечивости формальной арифметики. Доказывается, что эта теорема не может использоваться в аргументации против реализуемости выдвинутой Д. Гильбертом программы финитного обоснования математики.

Ключевые слова

формальная арифметика Дедекинда – Пеано, вторая теорема Гёделя о неполноте, доказательство, непротиворечивость, формула, выражающая непротиворечивость.

Для цитирования

Бессонов А. В. Еще раз о неверных истолкованиях второй теоремы Гёделя о неполноте // Сибирский философский журнал. 2020. Т. 18, № 3. С. 132–143. DOI 10.25205/2541-7517-2020-18-3-132-143

Once Again on Misinterpretations of Gödel’s Second Incompleteness Theorem

A. V. Bessonov

Institute of Philosophy and Law SB RAS
Novosibirsk, Russian Federation

Abstract

A response is given to the paper by A. M. Izmailova (Izmailova A. M. O kritike teoremy K. Gedelya o nepolnote A. V. Bessonovym [On A. V. Bessonov’s criticism of K. Gödel’s incompleteness theorem].

Studencheskii nauchnyi zhurnal "Grani nauki" [*Student Scientific Journal "Facets of Science"*], 2018, no. 1, p. 7–9. (in Russ.)) allegedly indicating a «serious error» in my analysis of K. Gödel's second incompleteness theorem. It is shown that her criticism is based on gross logical errors, as well as on a misunderstanding of both the second incompleteness theorem and my results. Such a widespread misinterpretation is based on the inadmissible confusion of the proof of the consistency of formal arithmetic with the proof in it of a formula expressing its consistency. It is argued that Gödel's second theorem is not directly related to the proof of the consistency of formal arithmetic. It is proved that this theorem cannot be used in argumentation against feasibility of D. Hilbert's finitistic program.

Keywords

Dedekind – Peano arithmetic, Gödel's second incompleteness theorem, proof, consistency, formula expressing consistency

For citation

Bessonov A. V. Once Again on Misinterpretations of Gödel's Second Incompleteness Theorem. *Siberian Journal of Philosophy*, 2020, vol. 18, no. 3, p. 132–143. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-7517-2020-18-3-132-143

Бить не нужно, а не вникнут – разъяснять!
В. С. Высоцкий

Знаменитые теоремы К. Гёделя о неполноте [Gödel, 1931] относятся к наиболее резонансным результатам математики XX века, оказавшим глубочайшее влияние на научное мышление в целом. Из них продуцируются далеко идущие следствия в самых различных областях научного знания от логики, математики, теории искусственного интеллекта, до гносеологии, юриспруденции и даже теоретической социологии. При этом якобы следующие из теорем Гёделя выводы в далеких от математики областях далеко не всегда корректно обоснованы (см., напр., [Сокал, Брикмон, 2002]). В то же время ошибочные представления о теоремах Гёделя бытуют и среди специалистов, получивших логико-математическое образование. Эти ошибки порождаются неадекватными истолкованиями теорем о неполноте.

Неверное понимание теорем Гёделя о неполноте индуцирует столь же неправильное истолкование работ других авторов по этой проблематике. Характерным примером подобной неадекватности служит работа А. М. Измайловой [Измайлова, 2018]. Посетовав на то, что «несмотря на известность теорем о неполноте, попрежнему существуют ученые, оспаривающие результаты, полученные Гёделем» [Измайлова, 2018. С. 7], она указывает на меня как на одного из таких исследователей и ставит в своей работе цель – «попытаться продемонстрировать наличие серьезной ошибки в аргументации Бессонова». Как же она реализует столь амбициозную задачу?

Измайлова исходит из весьма спорных определений основных понятий, используемых в формулировках теорем Гёделя. Для начала она утверждает, что «теорема Гёделя [Gödel,1931] включает в себя две части. Согласно первой части, (которую иногда называют отдельной теоремой), в непротиворечивых формальных системах, содержащих арифметику, всегда находятся неразрешимые формулы». И далее: «Вторая половина теоремы о неполноте гласит, что непротиворечивость рассматриваемой системы S недоказуема ее средствами, т. е. в ней невыводима формула, утверждающая, грубо говоря, непротиворечивость самой S» [Измайлова, 2018. С. 7]. Однако сам Гёдель назвал эти две половины или части отдельными теоремами (см. [Gödel, 1931. S. 187, Satz VI и S. 196, Satz XI]). И в современной литературе эти теоремы не иногда, но в подавляющем большинстве случаев называются, соответственно, первой и второй теоремами Гёделя о неполноте (см., напр., соответствующие статьи в Stanford Encyclopedia of Philosophy, Википедии и т. п.). Конечно, при желании можно назвать теоремой Гёделя и всю работу [Gödel,1931] от начала и до конца. Однако эта вроде бы незначительная неточность Измайловой недвусмысленно свидетельствует о ее крайне слабом знакомстве с основным массивом литературы по рассматриваемой теме.

Этот вывод подтверждается и использованием Измайловой экзотических для логиков определений непротиворечивости и полноты: «непротиворечивостью формальной системы называется тот факт, что в ней не доказуема ложь (Cons $\leftrightarrow$ |–/– ⌜A⌝, где Cons – непротиворечивость формальной системы S, а ⌜A⌝ – любое ложное предложение, соответственно, символ |–/– обозначает тот факт, что в системе S недоказуемо некое утверждение). Полнотой формальной системы является доказуемость всех истинных утверждений в этой системе» [Измайлова, С. 7]. Но сам Гёдель основывается на других определениях обсуждаемых понятий: *теория непротиворечива*, если в ней никакая формула не может быть доказана одновременно с ее отрицанием, или, что эквивалентно, если теория содержит хотя бы одну недоказуемую формулу; *теория неполна*, если в ней имеется замкнутая формула такая, что ни она, ни ее отрицание не доказуемы в данной теории (см. [Gödel, 1931, Satz VI, Satz XI]). Именно такие определения являются стандартными, общепринятыми в современной логике (также см. соответствующие статьи в Stanford Encyclopedia of Philosophy, Википедии и т. п.). Естественно, что этим определениям следую и я.

Касаясь используемого в ее работе определения, Измайлова пишет: «приводимое определение непротиворечивости является семантическим, в оригинале статьи его нет, но оно соответствует нашей цели дальнейшего доказательства» [Измайлова, С. 7]. Но к чему будет относиться это «дальнейшее доказательство»? При критическом анализе чьей-то (в данном случае, моей) аргументации следует исходить из определений, принимаемых ее автором, а не подменять их внешне сходными «аналогами». Иначе «доказательство серьезной ошибки» будет относиться не к рассматриваемой аргументации, но к продукту вольной фантазии критика по ее мотивам, что далеко не всегда совпадает с тем, что в действительности утверждает критикуемый.

Действительно, несмотря на то что принимаемое Измайловой семантическое определение непротиворечивости и используемое Гёделем и мной синтаксическое ее определение похожи, они отнюдь не синонимичны. Так, известный аргумент против т. н. упрощенной когерентной теории истины (истина – непротиворечивость) состоит в следующем. Построим теорию, добавив к классическому исчислению высказываний единственную аксиому «снег зелен». Очевидно, что полученная теория синтаксически непротиворечива, а семантически – нет, так как в ней доказуемо заведомо ложное утверждение. Приведенный пример не имеет непосредственного отношения к аргументации Измайловой. Но самое прямое отношение к ней имеет то, что «вторая теорема о неполноте оказывается ложной, если мы применим при доказательстве семантические методы… Под семантическими методами мы понимаем те, что основаны на понятии истины» [Пиньейро, 2015. С. 156]. И доказательство непротиворечивости формальной арифметики Дедекинда – Пеано (PA) при определении непротиворечивости через понятие истинности оказывается достаточно простым.

Действительно, все аксиомы PA (см., напр., [Бессонов, 2016a. С. 18–19]) истинны (выполняются на натуральных числах). Из истинных предпосылок по правилам первопорядковой логики можно вывести только истинные утверждения. Следовательно, из аксиом PA нельзя вывести ни одного ложного высказывания, что и означает непротиворечивость PA в семантическом смысле. Далее, из того, что в PA имеются недоказуемые высказывания (ложные высказывания недоказуемы), следует непротиворечивость PA и в синтаксическом смысле (см. [Пиньейро. 2015. С. 155–156]). О чем же тогда статья Измайловой? О «серьезной ошибке в аргументации Бессонова» или об опровержении второй теоремы Гёделя?

Помимо некорректности исходных посылок работы Измайловой, в ее «аргументации» содержатся просто-таки вопиющие логические ошибки. Формулировку второй теоремы «если система S (содержащая арифметику) непротиворечива, то в ней невыводима формула, выражающая непротиворечивость самой S» она «формализует» посредством «формулы» Cons S $\rightarrow$ |–/– Cons S и далее утверждает, что в ходе ее рассуждений «именно она играет ключевую роль» [Измайлова, 2018. С. 7]. Но в левой части этой «формулы» Cons S – это предположение, сформулированное в естественном языке, а в правой Cons S – это некоторая формула языка формальной арифметики, определенным образом выражающая факт непротиворечивости

PA. При таком двоемыслии можно много чего «понадоказывать». Обозначение столь разных (принадлежащих разным языкам) языковых выражений одним и тем же знаком ведет к смешению и подмене понятий, что и демонстрируют последующие рассуждения Измайловой. Приведем их без купюр.

«Стратегия Бессонова заключается в том, что он пытается опровергнуть формулу

$$(4)\ \mathrm{Cons}\ S \rightarrow |\!-\!/\!-\ |\!-\!/\!-\ \ulcorner A \urcorner,$$

т. е. показать, что при непротиворечивости S можно будет доказать недоказуемость формулы $\ulcorner A \urcorner$ (в качестве примера $\ulcorner A \urcorner$ он приводит ложное утверждение $\neg(0=0)$, а в качестве системы S рассматривает арифметику Пеано (PA)). Бессонов пишет:

Недоказуемость формулы при условии непротиворечивости PA *доказывается совершенно элементарно методом от противного. Предположим, что формула* $\neg(0=0)$ *доказуема. Тогда, учитывая* $|\!-\!-\ (0=0)$, *следовало бы* $|\!-\!-\ (0=0)\ \&\ \neg(0=0)$, *т. е.* PA *была бы противоречивой, что противоречит предположению.*

Мы пришли к противоречию: если PA *непротиворечива, то из второй теоремы о неполноте следует несуществование финитного доказательства недоказуемости в* PA *формулы* $\neg(0=0)$. *Но такое доказательство существует!* [Бессонов, 2016b. С. 170].

По мнению Бессонова, изложенное им доказательство опровергает формулу (4). В самом деле, делая допущение, что система непротиворечива, он показывает, что формула $\ulcorner\neg(0=0)\urcorner$ не будет в ней доказуема, т. е. строит доказательство недоказуемости ложной формулы $\ulcorner A \urcorner$. Но, действительно ли Бессонов опроверг в приведенном рассуждении формулу (4)? Опровержением формулы (4) должна быть формула (5):

$$(5)\ \mathrm{Cons}\ S \rightarrow |\!-\!-\ |\!-\!/\!-\ \ulcorner A \urcorner.$$

Доказал ли Бессонов формулу (5)? Очевидно, нет» [Измайлова, 2018. С. 8].

Здесь следует восстановить полный контекст, в который включено приводимое Измайловой мое доказательство из [Бессонов, 2016b]. Работа [Бессонов, 2016b] посвящена опровержению почти общепринятой в современной философии математики оценке второй теореме Гёделя как однозначного свидетельства нереализуемости гильбертовской программы финитного обоснования математики. Обычно такая оценка аргументируется следующим образом [1]:

Программа Д. Гильберта предполагает наличие неформального финитного доказательства непротиворечивости PA. Предположим, что таковое найдется. В соответствии с тезисом фон Неймана, любое неформальное финитное доказательство формализуемо в PA. В результате формализации этого гипотетического неформального доказательства мы получили бы доказуемую в PA формулу, выражающую непротиворечивость PA. А это противоречило бы второй теореме о неполноте.

В [Бессонов, 2016b] мы доказываем, что вторая теорема Гёделя о неполноте вообще не может корректно использоваться в доказательстве нереализуемости гильбертовской финитистской программы. Действительно, PA может быть или противоречивой, или непротиворечивой. Третьего не дано.

Пусть PA противоречива. Тогда вторая теорема о неполноте не применима, поскольку в ее формулировке содержится условие непротиворечивости PA.

Пусть PA непротиворечива. При этом не важно, имеется или нет какое-либо доказательство ее непротиворечивости. Рассмотрим формулу $\neg(0=0)$ и предположим, что найдется неформальное финитное доказательство невыводимости этой формулы в PA. По тезису фон Неймана, это доказательство можно было бы формализовать в PA. Тогда соответствующая формула, выражающая факт невыводимости $\neg(0=0)$ в PA, должна быть доказуемой в PA, что противоречит второй теореме о неполноте. Отсюда мы вправе сделать вывод о несуществовании неформального финитного доказательства невыводимости в PA формулы $\neg(0=0)$ в предположении о непротиворечивости PA. Однако если PA непротиворечива, то неформальное финитное доказательство недоказуемости в ней формулы $\neg(0=0)$ совершенно элементарно. Далее в рассуждениях следует приводимый Измайловой выше отрывок из моего доказательства в [Бессонов, 2016b. С. 170], показывающий, что в действительности такое финитное доказательство существует. После чего делается вывод, что ни в случае противоречивости PA, ни в случае ее непротиворечивости (т. е. никогда) вторая теорема о неполноте не может использоваться в доказательстве нереализуемости гильбертовской финитистской программы.

Измайлова приписывает мне намерение опровергнуть ее «формулу»

[1] Подробнее см.: *Zach R.* Hilbert's Program // E. N. Zalta (ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy // URL: http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/hilbert-program (дата обращения 10.08.2020).

$$(4)\ \text{Cons PA} \rightarrow |\!-\!/\!- \ |\!-\!/\!- \ \neg(0=0),$$

«т.е. показать, что при непротиворечивости PA можно будет доказать недоказуемость формулы $\neg(0=0)$ » [Измайлова, 2018. С. 8]. Но закавыченное разъяснение Измайловой вообще не соответствует ее «формуле» (4). Уж если использовать знак |–/– для сокращения выражения естественного языка «не доказуемо в системе», то следует недвусмысленно понимать, о какой именно системе идет речь. В моей аргументации знаки недоказуемости в «формуле» (4), не различаемые Измайловой, относятся к разным системам. Чтобы корректно отобразить это в стиле Измайловой, обозначим недоказуемость формулы в PA через $|\!-\!/\!-_{\text{PA}}$, а невозможность неформального, т. е. выраженного в естественном языке (финитного) доказательства – через $|\!-\!/\!-_{\text{ЕЯ}}$. Тогда окажется, что я должен опровергнуть не двусмысленную «формулу» (4), а

$$(4')\ \text{Cons PA} \rightarrow |\!-\!/\!-_{\text{ЕЯ}} |\!-\!/\!-_{\text{PA}} \neg(0=0),$$

для чего мне нужно доказать не

$$(5)\ \text{Cons PA} \rightarrow |\!\!- \ |\!-\!/\!- \ \neg(0=0),$$

а

$$(5')\ \text{Cons PA} \rightarrow |\!\!-_{\text{ЕЯ}} |\!-\!/\!-_{\text{PA}} \neg(0=0).$$

Как нетрудно убедиться, именно это я и сделал в [Бессонов, 2016b], приведя неформальное финитное доказательство недоказуемости в PA (при условии ее непротиворечивости) формулы $\neg(0=0)$, и тем самым отменив смертельный приговор, который якобы вынесла вторая теорема Гёделя о неполноте гильбертовской программе финитного обоснования математики.

Завершая свою работу, Измайлова пишет: «Недостаток аргументации Бессонова в том, что он не дал внятного опровержения следствия (4)» [Измайлова, 2018. С. 8]. Да уж. Нелегко быть внятным в соответствии со стандартами изобилующего смешением понятий сумбура вместо логики в исполнении Измайловой.

Поначалу я не хотел реагировать на статью Измайловой ввиду ее крайне низкого научного уровня и очевидной логической инфантильности автора. Однако когда ее утверждение о «серьезной ошибке» в моей аргументации начало распространяться по блогам, в которых интересующиеся любители обсуждают наиболее громкие научные результаты [2], стало понятно, что отмолчаться не удастся.

[2] См., напр.: Философские байки. Вторая теорема Гёделя о неполноте: почему её нельзя трактовать так, как хочется. URL: https://zen.yandex.ru/media/mindtales/vtoraia-teorema-gedelia-o-nepolnote-pochemu-ee-nelzia-traktovat-tak-kak-hochetsia-5c99ff3a59be0f00b29157de (дата обращения 20.01.2020).

Наряду с собственными огрехами, Измайлова не избежала и до сих пор широко распространенной хронической ошибки в истолковании второй теоремы о неполноте. Она пишет: «Даже если доказательство Бессонова можно формализовать в системе, …система не может доказать свою непротиворечивость, а значит недоказуемость в ней ложного предложения ⌜A⌝» [Измайлова, 2018. С. 8]. Тем самым косвенно она приписывает мне намерение доказать в [Бессонов, 2014; 2016b] непротиворечивость PA. Но ни в одной из своих работ (как и Гёдель в [Gödel, 1931]) я и не пытаюсь доказать непротиворечивость PA! В отношении непротиворечивости PA я лишь построил доказуемую в PA формулу, в гёделевском стиле выражающую непротиворечивость PA (см. [Бессонов, 2011; 2014]).

Смешение доказательства непротиворечивости арифметики с доказательством формулы, выражающей ее непротиворечивость, свойственно и гораздо более компетентным по сравнению с Измайловой исследователям. Так, при обсуждении моего доклада в Хельсинки на Logic Colloquium 2015 (см. [Бессонов, 2015b]), известный логик, авторитетнейший специалист по теории доказательств С. Н. Артемов (Graduate Center of the City University of New York) сделал замечание, что я доказываю непротиворечивость PA, эту непротиворечивость уже предполагая (а я всего лишь аргументировал доказуемость в PA некоторой выражающей непротиворечивость PA формулы). Как я показал в [Бессонов, 2017], Л. Г. Антипенко [Антипенко, 2017], критикуя мою работу [Бессонов, 2015a], также путает доказательство непротиворечивости арифметики с доказательством формулы, выражающей ее непротиворечивость. Спровоцировал подобную ошибку сам Гёдель. Приведем формулировку его второй теоремы от начала и до конца так, как она изложена в первоисточнике:

Теорема XI. Пусть κ – рекурсивный непротиворечивый класс ФОРМУЛ; тогда ЗАМКНУТАЯ ФОРМУЛА, устанавливающая, что κ непротиворечив, не является κ-ДОКАЗУЕМОЙ; в частности, непротиворечивость P не доказуема в P, в предположении, что P непротиворечива (в противном случае, конечно, всякое высказывание доказуемо [в P]) [Gödel, 1931. S. 196].

Если, в отсутствии знакомства с первоисточником, вырвать из контекста этой формулировки фразу «непротиворечивость P не доказуема в P, в предположении, что P непротиворечива», то может создаться впечатление, что во второй теореме речь идет о доказательстве непротиворечивости арифметики. Однако выражение в скобках в формулировке теоремы XI однозначно свидетельствует, что здесь имеется в виду именно недоказуемость устанавливающей непротиворечивость арифметики формулы.

Доказуемость формулы, выражающей непротиворечивость PA, вовсе не означает доказательство непротиворечивости PA, поскольку в противоречивой теории доказуемы все формулы, в том числе и формула, выражающая ее непротиворечивость. Следует ли отсюда непротиворечивость этой противоречивой теории?

Я и не ставил задачу доказать непротиворечивость PA, полагая, что вторая теорема о неполноте вряд ли вообще может использоваться в такого рода доказательстве, поскольку в ее формулировке условие непротиворечивости PA уже содержится. Такой взгляд подкрепляет и свидетельство Г. Крайзеля, который пишет: «Как подчеркивал сам Гёдель, …его вторая теорема о неполноте не имеет отношения ни к какой разумной постановке вопроса о непротиворечивости» [Крайзель, 1988. С. 199].

Заключение

Кратко подведем итоги изложенного обсуждения.

1. Измайлова в своей статье [Измайлова, 2018] продемонстрировала не «наличие серьезной ошибки в аргументации Бессонова», но свою логическую безграмотность. Ее критика моих работ, основанная на многочисленных логических ошибках, а также на неверном понимании теорем Гёделя о неполноте и моей аргументации, абсолютно незначима.

2. В моих работах, посвященных второй теореме Гёделя о неполноте, я (как и сам Гёдель) не доказываю и даже не пытаюсь доказать непротиворечивость PA.

3. Я не «оспариваю результаты, полученные Гёделем» и вообще не затрагиваю собственно математическую часть его работы [Gödel, 1931], исходя из его доказательств как из данности. Я опровергаю, хотя и глубоко укоренившиеся в логике и философии, но неверные представления, основывающиеся на этих доказательствах. К таковым относятся вывод, согласно которому если PA непротиворечива, то в ней не доказуема никакая формула, выражающая ее непротиворечивость (арифметика не может доказать свою непротиворечивость), а также приговор, по которому из второй теоремы Гёделя о неполноте однозначно следует невыполнимость выдвинутой Гильбертом программы финитного обоснования математики.

4. В силу п. 3 мои результаты не относятся к собственно математике. В то же время в философии математики их значение велико, поскольку они защищают программу финитизма Гильберта от ее якобы убийственной критики, основанной на теоремах Гёделя о неполноте. Отсюда следует, что т. н. «постгёделевский этап философии математики» [Михайлова, 2008. С. 113] в основном завершен.

Список литературы / References

Антипенко Л. Г. Полемический отзыв на статью А.В. Бессонова «Предикатная зависимость второй теоремы Гёделя о неполноте» // Сиб. филос. журн. 2017. Т. 15, № 3. С. 208–217.

Antipenko L. G. Polemicheskii otzyv na stat'yu A. V. Bessonova "Predikatnaya zavisimost' vtoroi teoremy Gedelya o nepolnote" [A polemic review of A. V. Bessonov's article "Gödel's second incompleteness theorem is predicate dependent"]. *Siberian Journal of Philosophy*, 2017, no. 3, p. 208–217. (in Russ.)

Бессонов А. В. К интерпретации теорем Гёделя о неполноте арифметики // Вестник Том. гос. ун-та. Философия. Социология. Политология. 2011. № 4. С. 177–189.

Bessonov A. V. K interpretatsii teorem Gedelya o nepolnote arifmetiki [Toward an interpretation of Gödel's incompleteness theorems]. *Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science*, 2011, no. 4. p. 177–189. (in Russ.)

Бессонов А. В. О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте. I // Философия науки. 2014. № 4 (63). С. 12–31.

Bessonov A. V. O dvukh nevernykh dogmakh, svyazannykh so vtoroi teoremoi Gedelya o nepolnote. I [Two false dogmas related with Gödel's second incompleteness theorem. I]. *Philosophiya nauki* [*Philosophy of Science*], 2014, no. 4 (63), p. 12–31. (in Russ.)

Бессонов А. В. Предикатная зависимость второй теоремы Гёделя о неполноте // Вестник НГУ. Серия: Философия. 2015a. Т. 13, вып. 4. С. 5–14.

Bessonov A. V. Predikatnaya zavisimost' vtoroi teoremy Gedelya o nepolnote [Gödel's second incompleteness theorem is predicate dependent]. *Vestnik NSU. Series: Philosophy*, 2015a, no. 4, p. 5–14. (in Russ.)

Bessonov A. V. Peano arithmetic can well prove its own consistency. In: 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, CLMPS 2015, Logic Colloquium 2015, LC 2015, Book of Abstracts (University of Helsinki, 3–8 August 2015). Helsinki, 2015b, p. 705–706.

Бессонов А. В. О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте. II // Философия науки. 2016a. № 2(69). С. 42–61.

Bessonov A. V. O dvukh nevernykh dogmakh, svyazannykh so vtoroi teoremoi Gedelya o nepolnote. II [Two false dogmas related with Gödel's second incompleteness theorem. II]. *Philosophiya nauki* [*Philosophy of Science*], 2016a, no. 2 (69), p. 42–61. (in Russ.)

Бессонов А. В. Вторая теорема Гёделя о неполноте не дезавуирует программу Гильберта // Логико-философские штудии. 2016b. Т. 13 № 2. С. 169–170.

Bessonov A. V. Vtoraya teorema Gedelya o nepolnote ne dezavuiruet programmu Gil'berta [Gödel's second incompleteness theorem does not disrupt Hilbert's program]. *Logiko-filosofskie shtudii* [*Logical and Philosophical Studies*], 2016b, no. 2, p. 169–170. (in Russ.)

Бессонов А. В. Что доказано и что не доказано во второй теореме Гёделя о неполноте арифметики // Сиб. филос. журн. 2017. Т. 15, № 3. С. 218–233.

Bessonov A. V. Chto dokazano, i chto ne dokazano vo vtoroi teoreme Gedelya o nepolnote arifmetiki [What is proved and what is not proved in Gödel's second incompleteness theorem]. *Siberian Journal of Philosophy*, 2017, no. 3, p. 218–233. (in Russ.)

Измайлова А. М. О критике теоремы К. Гёделя о неполноте А. В. Бессоновым // Студенч. науч. журн. «Грани науки». 2018. Т. 6, № 1. С. 7–9.

Izmailova A. M. O kritike teoremy K. Gedelya o nepolnote A.V. Bessonovym [On A. V. Bessonov's criticism of K. Gödel's incompleteness theorem]. *Studencheskii nauchnyi zhurnal "Grani nauki"* [*Student Scientific Journal "Facets of Science"*], 2018, no. 1, p. 7–9. (in Russ.)

Крайзель Г. Биография Курта Гёделя // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, вып. 2 (260). С. 175–216.

Kraizel G. Biografiya Kurta Gedelya (ch. I, II) [Biography of Kurt Gödel (parts I and II)]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [*Russian Mathematical Surveys*], 1988, iss. 2 (260), p. 175–216. (in Russ.)

Михайлова Н. В. Системный синтез программ обоснования современной математики. Минск: МГВРК, 2008.

Mikhailova N. V. Sistemnyi sintez programm obosnovaniya sovremennoi matematiki [System Synthesis of Modern Mathematic Foundation Programs]. Minsk, MGVRK, 2008. (in Russ.)

Пиньейро Г. Э. У интуиции есть своя логика. Гёдель. Теоремы о неполноте // Наука. Величайшие теории. М.: Де Агостини, 2015. Вып. 17. С. 155–162.

Pineiro G. E. U intuitsii est' svoya logika. Godel. Teoremy o nepolnote. [Intuition Has Its Own Logic. Gödel. Incompleteness Theorems], *Nauka. Velichaishie teorii* [*Science. Greatest Theories*], 2015, iss. 17, p. 155–162. (in Russ.)

Сокал А., Брикмон Ж. Интеллектуальные уловки. Критика философии постмодерна. М.: Дом интеллект. книги, 2002.

Sokal A., Bricmont J. Intellektual'nyye ulovki. Kritika filosofii postmoderna [Impostures Intellectuelles]. Trans. into Russ. Moscow, 2002. (in Russ.)

Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I // Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931, bd. 38, S. 173–198.

Материал поступил в редколлегию (Received) – 09.09.2020
Статья принята к публикации (Accepted) – 15.10.2020

Сведения об авторе / Information about the Author

Бессонов Александр Владимирович

доктор философских наук

ведущий научный сотрудник, Институт философии и права СО РАН (Новосибирск, Россия)

Aleksandr V. Bessonov

Doctor of Science (Philosophy)

Leading researcher, Institute of Philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

trt@academ.org

ORCID 0000-0002-6693-7539