УДК 165.0, 168.51
DOI 10.25205/2541-7517-2018-16-1-20-32

Л. Д. Ламберов

Уральский федеральный университет
пр. Ленина, 51, Екатеринбург, 620000, Россия

lev.lamberov@urfu.ru

УНИВАЛЕНТНОСТЬ И ПОНЯТИЕ СТРУКТУРЫ В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ *

Статья посвящена рассмотрению текущего состояния конструктивистского и структуралистского направлений в философии математики. Обосновывается взаимосвязь указанных направлений в рамках теоретико-типового подхода к основаниям математики через рассмотрение понятий изоморфизма, инварианта и структуры. Особо обсуждаются аксиома унивалентности и современное теоретико-типовое понятие равенства.

Ключевые слова: основания математики, философия математики, теория типов, конструктивизм, структурализм, гомотопическая теория типов, структура, изоморфизм, вычисление.

Дискуссии об основаниях математики в последнее время по ряду причин снова приобрели остроту и концептуальную насыщенность. Связано это прежде всего с прогрессом как в ряде теоретических областей математики (таких, например, как топология и теория категорий), так и в областях, развиваемых по большей части в рамках компьютерных наук и имеющих непосредственное практическое приложение (например, теория типов и попытки развития формальной математики, предполагающей компьютерную проверку доказательств). Эти дискуссии в определенном смысле подытоживают недовольство теорией множеств в качестве попытки построения оснований математики, а также выдвигают на первый план конструктивистские и структуралистские подходы в философии математики. Для того чтобы разобраться в современных дискуссиях, необходимо

* Исследование выполнено при поддержке Совета по грантам Президента РФ, проект МК-6552.2016.6.

последовательно рассмотреть конструктивизм и структурализм, а затем обратить внимание на объединяющий их подход.

Конструктивизм

Конструктивизм (или интуиционизм) предполагает более строгое понимание понятий существования, построения, а также логических связок и кванторов [1], чем в рамках классической математики. Классическое реалистское (или, если хотите, «идеалистическое») понимание дизъюнкции как отрицания того, что оба дизъюнкта ложны, а существования как отрицания того, что некоторый предикат ложен для любого объекта, приводят к тому, что математика не может быть интерпретирована в рамках вычислительных моделей. Изначальная же мотивация интуиционизма, выдвинутого Л. Э. Я. Брауэром, состояла в точке зрения, что математика представляет собой свободное творение человеческого разума и не зависит ни от языка, ни от какого бы то ни было мира идеальных объектов (например, мира платоновских идей). Согласно Л. Э. Я. Брауэру, математические истины не существуют за пределами человеческого мышления, а истинность или ложность математических утверждений зависят от соответствующего ментального построения или демонстрации того, что такое построение невозможно.

В дальнейшем акцент на подходе со стороны (своеобразной кантианской) философии сознания и понятия интуиции был несколько нивелирован, а благодаря А. Гейтингу и А. Н. Колмогорову логические термины получили интуиционистскую интерпретацию (в аксиоматизации интуиционистской логики и исчислении задач, что зачастую называется интерпретацией Брауэра – Гейтинга – Колмогорова), а позже были уточнены С. Клини с помощью понятия реализуемости. Тем не менее следует заметить, что общий философский настрой в духе Л. Э. Я. Брауэра [2] еще сохранялся некоторое время. Например, в фундаментальной работе Э. Бишопа по конструктивному анализу. Полезно различать, подобно Ф. Ричмэну [Richman, 1990; 1996], онтологический (или брауэровский) и эпистемологический варианты конструктивизма, где под онтологическим конструктивизмом понимается точка зрения, что математические объекты являются своего рода ментальными сущностями, а эпистемологический конструктивизм, с другой стороны, подразумевает лишь понимание конструк-

[1] Как определенного рода инструкций по построению доказательств.

[2] Другими словами, понимание математики как продукта человеческого мышления.

тивной математики как чего-то характеризующегося специфической методологией, выстроенной на основе интуиционистской логики. Онтологический конструктивизм влечет за собой конструктивизм эпистемологический, но обратное следование не имеет места с необходимостью.

Можно без преувеличения сказать, что такой эпистемологический конструктивизм в том или ином виде (вполне вероятно, неосознанно) развивался начиная с работ М. Э. Шейнфинкеля, Х. Карри по комбинаторной логике и А. Чёрча по лямбда-исчислению. Не вдаваясь глубоко в историю, необходимо подчеркнуть роль лямбда-исчисления с типизацией в стиле А. Чёрча, поскольку именно оно, метафорически говоря, стало одним из «кирпичиков» современного конструктивизма. Точнее, оно было взято за основу при построении интуиционистской теории типов П. Мартина-Лёфа, а также нескольких систем построения математических доказательств. Интуиционистская теория типов П. Мартина-Лёфа, ряд идей которой были предвосхищены в формальном языке *Automath* Н. де Брёйна, в дальнейшем получила свое развитие и с различными расширениями была реализована в современных системах для интерактивного построения доказательств (например, *Coq* и *Agda*).

В связи с развитием типизированного лямбда-исчисления важно отметить роль соответствия Карри – Говарда. Соответствие Карри – Говарда представляет собой структурную взаимосвязь между доказательствами и вычислениями. Изначально эта взаимосвязь была замечена Х. Карри в отношении типов комбинаторов (в комбинаторной логике) и аксиомных схем интуиционистской логики высказываний, а позже подмечена им же в отношении систем построения доказательств в духе Гильберта и типизированного фрагмента комбинаторной логики. Несколько позже У. Говард обнаружил, что подобная взаимосвязь имеет место между натуральным исчислением и типизированным лямбда-исчислением. Соответствие Карри – Говарда в общем смысле представляет собой соответствие дерева доказательства той или иной теоремы и дерева вывода типа соответствующего лямбда-терма. Иначе говоря, теоремы соответствуют типам, а доказательства – построению терма, имеющего указанный тип. К примеру, импликация $A \to B$ соответствует типу функций, принимающих аргумент типа A и возвращающих результат типа B. Соответствие здесь очевидно при условии принятия интерпретации Брауэра – Гейтинга – Колмогорова, поскольку, согласно последней, доказательство импликации $A \to B$ представляет собой операцию, преобразующую доказательство для A в доказательство для B.

Таким образом, эпистемологический конструктивизм позволяет обнаружить вычислительный смысл математических результатов, так как любое (конструктивное) доказательство той или иной теоремы представляет собой вычислительную процедуру. Каждый (конструктивистски полученный) математический результат может быть записан в виде компьютерной программы с помощью специального языка и проверен компилятором (грубо говоря, так работают указанные уже *Coq* и *Agda*). Таким образом, следует отметить, что конструктивизм в эпистемологическом смысле в настоящее время наиболее подходящим образом реализуется в рамках теоретико-типового подхода, тогда как с классическим подходом ассоциируется теоретико-множественный подход [3].

Классическая математики, строящаяся на основе теории множеств, во многом лишена указанной возможности. Метафорически говоря, никакого вычислительного смысла, «понятного» для конечных вычислителей (типа компьютеров и людей), у «неконструктивных» математических результатов (вроде теоремы Банаха – Тарского или решения М. Лашковичем проблемы квадратуры круга по А. Тарскому) просто нет. Тем не менее гораздо более важным преимуществом теоретико-типового подхода (а в данном контексте это подразумевает конструктивный подход) к основаниям математики перед подходом теоретико-множественным является понятие структуры, о котором подробнее речь пойдет ниже. Пока же следует особо отметить одну важную черту теоретико-типового подхода, связанную с понятием структуры и заключающуюся в том, что любое определимое в теории типов свойство объекта является инвариантным [4].

Структурализм

История структурализма в философии математики по продолжительности вполне сравнима с историей конструктивизма. Так, предпосылки современного структурализма в философии математики можно обнаружить у Д. Гильберта, предполагавшего определять понятия геометрии через их соотношения друг с другом, и в работах французских математиков, публиковавшихся под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки. Тем не менее в собственном смысле совре-

---

[3] Последнее замечание будет прояснено далее при обсуждении понятий тождества и различия, а также гомотопической теории типов. Кроме того, для сравнения теоретико-множественного и теоретико-типового подходов к основаниям математики можно обратиться к недавней статье автора [Ламберов, 2017].

[4] Об этом результате см.: [Makkai, 1998; Awodey, 2014].

менный структуралистский подход представляет собой лишь складывающуюся, но весьма перспективную программу исследований, связываемую прежде всего с М. Резником [Resnik, 1997] и С. Шапиро [Shapiro, 1997; 2000], а также с аргументами П. Бенацеррафа о неединственности представления математических объектов.

В самом общем смысле структура представляет собой абстрактную форму некоторой системы, отвлеченную от любых особенностей объектов этой системы, которые не отражены в отношениях между объектами. Тогда, допустим, арифметика в структуралистском смысле представляет собой исследование структуры натуральных чисел, т. е. некоторой общей формы различных систем натуральных чисел, абстрагированной от конкретных нерелевантных свойств чисел, как они представляются в той или иной системе.

При обращении к понятию структуры важно отметить роль, которую сыграла в разработках современных оснований математики теория категорий. В 1950–1960-х гг. У. Лавер предпринял попытку построения теории множеств с точки зрения теории категорий и сформулировал то, что было названо ETCS (элементарная теория категории множеств). Важным оказалось то, что получившаяся теория представляла собой структурную интерпретацию. Последнее предполагает, что универсальные конструкции в категориях позволяют работать с изоморфными объектами как с «равными». Это кардинальным образом отличает ETCS от «материальных» теорий множеств (таких, например, как ZFC) тем, что ключевым понятием последних является понятие принадлежности элемента множеству, а все объекты (в большинстве вариантов «материальных» теорий, однако в некоторых вариантах в качестве элементов используются «атомы») сами представляют собой множества. В противоположность этому «структурные» теории основываются на внешних отношениях между объектами, а элементы оказываются анонимными.

Последнее обстоятельство позволяет противопоставить внутренний и внешний смыслы понятия структуры. Следует отметить, что при представлении, например, натуральных чисел в теории множеств (допустим, в ZFC) понятие структуры тоже присутствует. Тем не менее структура в этом случае понимается «внутренним» способом [5] через отношения и операции над элементами. При таком понимании математическими объектами оказываются отдельно взятые конкретные натуральные числа. Подобный подход может быть обнаружен и в уже указанных работах М. Резника и С. Шапиро. Несмотря

---

[5] См.: [Awodey, 2014].

на то, что в определенном смысле структурализм был спровоцирован аргументами П. Бенацеррафа [Benacerraf, 1965], критические замечания последнего все еще работают против структуралистов, определяющих понятие структуры «внутренним» способом.

Теперь следует коротко рассмотреть проблему неединственности представления математических объектов. Существует несколько широко известных способов представления чисел с помощью множеств. Два разных способа представления одного и того же числа (например, в стиле Дж. фон Неймана и Э. Цермело) отличаются друг от друга, не являются изоморфными (их структуры различны!). Более того, можно сформулировать утверждения, которые будут истинными для одного представления и ложными для другого. Представляется, что источником этой проблемы является то, что представление того или иного натурального числа в рамках теории множеств содержит в себе не только свойства чисел, но и некоторые привнесенные свойства множеств. Метафорически это можно сравнить с нестандартными моделями: нестандартная модель содержит некоторые объекты, которые мы не знаем как считать, а представление числа через множества содержит свойства, которые мы не можем определить как свойства чисел. Причем необходимо отметить, что такие «привнесенные» свойства касаются в первую очередь понятия структуры. Так, например, каждое «теоретико-множественное число» будет содержать в себе теоретико-множественный ноль в качестве своего элемента, также может быть «построен» булеан того или иного числа (как следует ожидать, при разных теоретико-множественных представлениях одного и того же числа разными вполне могут оказаться и их булеаны!). Подобные «структуры» весьма странны для обыкновенной арифметики, а математические объекты «рассыпаются», что не может удовлетворять исследователя.

Даже если и не драматизировать, ситуация в онтологическом смысле критическая. Тем не менее понятие математического объекта вполне может получить свое строгое и удовлетворительное определение. Требуемое понятие математического объекта должно искать в другом понимании структуры. Так, при определении структуры «внешним» образом [6] ключевую роль играют уже не отношения и операции над этими элементами, а отображения (в смысле теории категорий) между элементами одного вида. По меткому выражению Т. Лейнстера, теория категорий представляет собой «взгляд на математику с высоты птичьего полета», при котором «подробности не видны, но можно

[6] Подробнее см.: [Awodey, 1996].

заметить паттерны, которые нельзя увидеть с земной поверхности» [Leinster, 2014. P. 1]. Такой теоретико-категорный подход к понятию структуры приводит к переопределению понятия математического объекта. Теперь математическим объектом является не конкретное число, а вся (если хотите) система натуральных чисел.

Благодаря «внешнему» варианту понимания структуры имеет смысл более широко говорить об изоморфизме и тождестве. В общем случае под изоморфизмом понимается отношение, сохраняющее структуру. Так, некоторые два математических объекта будут считаться изоморфными в том случае, если они структурно совпадают на требуемом уровне абстракции. Необходимо уточнить, что важную роль в данном случае играют свойства объектов. К примеру, два несовместимых по свойствам теоретико-множественные представления натуральных чисел не будут изоморфны в силу того, что эти представления имеют разные структуры. Возникают «множественные» (в смысле их различия и числа) и несводимые друг к другу представления натуральных чисел. Где же в таком случае искать «сами» (если хотите, «настоящие») натуральные числа? Тем не менее, если представления, допустим, тех же натуральных чисел предполагают только релевантные (другими словами, инвариантные) свойства, то такие представления окажутся изоморфными.

Тождество и различие

При обсуждении теоретико-типового подхода к основаниям математики была отмечена важная особенность, состоящая в том, что определимые при теоретико-типовом подходе свойства оказываются инвариантными. Последнее может быть проиллюстрировано следующим примером. Натуральные числа можно задать через ноль (zero) и функцию, возвращающую следующее натуральное число (succ), где N – тип натурального числа:

zero: N
succ: N → N

Тогда ряд натуральных чисел будет представлен следующим образом: zero, succ(zero), succ(succ(zero)), succ(succ(succ(zero))), и т. д. В дальнейшем можно определить соответствующие арифметические операции, но нас будет интересовать несколько другое. Такое теоретико-типовое представление натуральных чисел не является единственным. Например, можно было бы определить тип натуральных* чисел (тип N*) через единицу (one), функцию удвоения (double) и функцию удвоения с прибавлением единицы (double + 1):

one: N*
double: N* → N*
double + 1: N* → N*

В этом случае «покрытым» оказывается не весь ряд натуральных чисел, «покрывается» только следующий его фрагмент: one, double(one), double + 1(one), double(double(one)), double + 1(double(one)) и т. д. Для чисел 1, 2, 3, 4 и 5, соответственно. Иначе говоря, ноль оказывается «выколотым» из нашего ряда. Тем не менее с целью «схватить» весь ряд натуральных чисел определим еще один тип (тип N_2), который уже и будет выполнять роль нашего нового представления натуральных чисел, через ноль (zero) и тождество (id):

zero: N_2
id: N* → N_2

Заметьте, что функция тождества принимает в качестве аргумента терм типа N*, а в качестве результата возвращает терм типа N_2. Получается следующий ряд: zero, id(one), id(double(one)), id(double + 1(one)) и т. д. Для наглядности построим следующую таблицу:

Число	Терм типа N	Терм типа N_2
0	zero	zero
1	succ(zero)	id(one)
2	succ(succ(zero))	id(double(one))
3	succ(succ(succ(zero)))	id(double + 1(one))
4	succ(succ(succ(succ(zero))))	id(double(double(one)))
5	succ(succ(succ(succ(succ(zero)))))	id(double + 1(double(one)))

Как уже было указано, для получившихся представлений натуральных чисел можно соответствующим образом определить арифметические операции, но следует отметить, что определения арифметических операций для типа N и для типа N_2 будут различаться. Некоторые арифметические операции будет удобнее (эффективнее) выполнять с термами типа N, а некоторые другие – с термами типа N_2. Однако это не будет означать, что натуральные числа N и натуральные числе N_2 не изоморфны друг другу. Даже наоборот, можно доказать математическую теорему о том, что они изоморфны.

Итак, на определенном уровне абстракции можно утверждать, что представление натуральных чисел N и представление натуральных чисел N_2 являют собой тождественные представления (вплоть до отношения изоморфизма). Правда, необходимо учитывать, что хоть эти два представления натуральных чисел и являются изоморфными, они тожественны в некотором строго определенном смысле и не тождественны в некотором другом. Например, они не тождественны, если нас интересуют «вычислительные» особенности этих представлений в рамках типизированного лямбда-исчисления. Тем не менее не следует забывать о том, что применительно к тождеству речь ведется исключительно в рамках строго определенного уровня абстракции. Ведь и $2 + 2 = 4$, и $2 \times 9 = 9 \times 2$ только на определенном уровне абстракции (вычислительно в рамках лямбда-исчисления они вполне могут быть различены). Для нас же важно то, что представление некоторого математического объекта при теоретико-типовом подходе сохраняет инвариантные свойства этого объекта, а два математических объекта на должном уровне абстракции могут быть названы тождественными.

Унивалентность

Одним из ключевых моментов современного теоретико-типового подхода к основаниям математики является аксиома унивалентности, предложенная В. Воеводским [7]. Коротко говоря, она может быть сформулирована следующим образом: тождественное равенство двух объектов эквивалентно эквивалентности этих объектов. Либо представлена так:

$$(A =_U B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B).$$

В данном случае необходимо уточнить, что понятие эквивалентности рассматривается здесь весьма широко и представляет собой

[7] Для введения в гомотопическую теорию типов см.: [The Univalent Foundations Program, 2013].

обобщение понятия изоморфизма (т. е. этим понятием эквивалентности охватывается и гомотопическая эквивалентность, и категорическая эквивалентность, и логическая эквивалентность, и т. д.). Более того, в теоретико-типовом смысле в аксиоме унивалентности речь идет о тождественном равенстве ($=_U$) двух (малых) типов общего типа U (или вида, т. е. типа типов). Соответственно, объект типа тождественных равенств этих двух типов представляет собой доказательство того, что эти типы тождественны. В рамках гомотопической теории типов этот объект представляет собой путь в пространстве путей. В случае же когда типы A и B представляют собой пропозиции, аксиома унивалентности дает нам пропозициональную экстенсиональность. Кроме того, аксиома унивалентности влечет за собой экстенсиональность для функций [8].

Аксиома унивалентности интересна тем, что она сохраняет описанную ранее особенность теории типов, состоящую в том, что все определимые свойства являются инвариантами. Более того, благодаря аксиоме унивалентности эта особенность теории типов теперь «работает» для всех объектов и всех свойств, это предполагает, что все определимые свойства являются структурными. Таким образом, аксиома унивалентности дает возможность избавиться в ходе формализации от неудобных конструкций с классами эквивалентностей, сопровождающих утверждения, использующие разного рода инварианты.

В общем случае понятия экстенсиональности для функций и пропозиций, а также для типов (унивалентность) представляют собой более строгие варианты принципа тождественности неразличимых Г. В. Лейбница. Грубо говоря, изоморфные типы оказываются неразличимыми (при внешней интерпретации понятия структуры). Таким образом, аксиома унивалентности позволяет сформулировать весьма тонкое понятие тождества, которое, по меткому выражению С. Оуди, «не схлапывает различные объекты», а «расширяет понятие тождества до понятия эквивалентности» [Awodey, 2014. P. 9]. С точки зрения современного структуралистского подхода к основаниям математики «вопрос о том, являются ли два эквивалентных математических объекта в действительности тождественными в некотором более строгом, нелогическом смысле, остается за пределами математики», а сами «математические объекты просто *являются* структурами» [Ibid. P. 10–11]. Последнее также вносит свой вклад в построение

[8] Результат получен В. Воеводским и формализован в *Coq* А. Бауэром и П. Л. Ламсдэйном. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/BauerLumsdaineUnivalence.pdf (дата обращения 15.11.2017).

библиотек формализованной математики, поскольку аксиома унивалентности упрощает работу со структурами. Фактически можно заменять одну структуру на другую, эквивалентную ей без изменения всей конструкции.

Список литературы

Ламберов Л. Д. Основания математики: теория множеств vs теория типов // Философия науки. 2017. № 1. С. 41–60.

Awodey S. Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective // Philosophia Mathematica. 1996. Vol. 4. P. 209–237.

Awodey S. Structuralism, Invariance, and Univalence // Philosophia Mathematica. 2014. Vol. 22. P. 1–11.

Benacerraf P. What Numbers Could Not Be // Philosophical Review. 1965. Vol. 74. P. 47–73.

Leinster T. Basic Category Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014.

Makkai M. Towards a Categorical Foundation of Mathematics // Logic Colloquium '95. Lecture Notes in Logic 11 / Ed. by J. A. Makowsky, E. V. Ravve. Berlin: Springer, 1998. P. 153–190.

Resnik M. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon Press, 1997.

Richman F. Intuitionism as Generalization // Philosophia Mathematica. 1990. Vol. 5. P. 124–128.

Richman F. Interview with a Constructive Mathematician // Modern Logic. 1996. Vol. 6. P. 247–271.

Shapiro S. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. New York: Oxford Univ. Press, 1997.

Shapiro S. Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.

The Univalent Foundations Program. Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study, 2013. URL: https://homotopytypetheory.org/book (дата обращения 15.11.2017).

Материал поступил в редколлегию 16.11.2017

L. D. Lamberov

Ural Federal University
51 Lenin Ave., Yekaterinburg, 620000, Russian Federation

lev.lamberov@urfu.ru

UNIVALENCE AND THE CONCEPT OF STRUCTURE IN THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

The paper analyzes the current state of the constructivist and structuralist trends in the philosophy of mathematics. The interrelation of these trends is substantiated by means of the concepts of isomorphism, invariant, and structure within the framework of the type-theoretical approach to the foundations of mathematics. In particular, the paper discusses the axiom of univalence and the modern type-theoretical concept of identity.

Keywords: foundations of mathematics, philosophy of mathematics, type theory, constructivism, structuralism, homotopy type theory, structure, isomorphism, computation.

References

Awodey S. Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective. *Philosophia Mathematica,* 1996, vol. 4, p. 209–237.

Awodey S. Structuralism, Invariance, and Univalence. *Philosophia Mathematica,* 2014, vol. 22, p. 1–11.

Benacerraf P. What Numbers Could Not Be. *Philosophical Review,* 1965, vol. 74, p. 47–73.

Lamberov L. D. Osnovaniya matematiki: teoriya mnozhestv vs. teoriya tipov [Foundations of Mathematics: Set Theory vs. Type Theory]. *Filosofiya nauki* [*Philosophy of Science*], 2017, no. 1, p. 41–60. (In Russ.)

Leinster T. *Basic Category Theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2014.

Makkai M. Towards a Categorical Foundation of Mathematics. *Logic Colloquium '95. Lecture Notes in Logic 11*. J. A. Makowsky and E. V. Ravve (eds.). Berlin, Springer, 1998, p. 153–190.

Richman F. Intuitionism as Generalization. *Philosophia Mathematica*, 1990, vol. 5, p. 124–128.

Richman F. Interview with a Constructive Mathematician. *Modern Logic*, 1996, vol. 6, p. 247–271.

Resnik M. *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford, Clarendon Press, 1997.

Shapiro S. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. New York, Oxford Univ. Press, 1997.

Shapiro S. *Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics.* Oxford, Oxford Univ. Press, 2000.

The Univalent Foundations Program. Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study, 2013. URL: https://homotopytypetheory.org/book.