

УДК 165

DOI 10.25205/2541-7517-2018-16-3-28-37

А. В. Хлебалин

*Институт философии и права СО РАН
ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия*

sasha_khl@mail.ru

ЛОГИЧЕСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЫВОД: СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Рассматривается соотношение математического и логического вывода в математике. Анализируется онтологический подход к объяснению неустранимости семантического содержания математического вывода. Обосновывается, что такой подход влечет серьезные метафизические обязательства, на основании чего делается вывод о перспективности эпистемологического подхода в объяснении природы различия формально логического и математического вывода.

Ключевые слова: семантика, онтология математической теории, эпистемология математического доказательства.

Одним из обстоятельств, которое подчеркивается в связи с эпистемологическими характеристиками математического доказательства, является ставшее привычным указание на то, что в самом идеале доказательства слиты нормативный и дескриптивный элементы, которые на протяжении уже более чем столетия расходятся в практике математики. Если нормативный компонент на протяжении этого времени приобрел в рамках метаматематики невиданную прежде строгость и четкость, прежде всего, в концепции формализма, то дескриптивный компонент определяется многообразием практик доказательства. Таким образом, нормативный идеал и практика доказательства все более отдаляются друг от друга.

Представляя доказательство как пошаговое применение заранее установленных правил манипуляции символами, делая доказательство проверяемым на каждом этапе вывода, формалистская доктрина достигает апогея обоснования дедуктивного вывода как единствен-

ного законного средства построения математического доказательства. То, что нормативный идеал весьма далек от практики, стало понятным фактически сразу: «существует конфликт между математической практикой и доктриной формализма» [Kreisel, 1969. P. 39]. Нельзя сказать, что формалистская концепция доказательства предполагала коренное преобразование математической практики; скорее, сторонники формализма видели в этом тяжелый грех интуиционизма. Напротив, формализм предлагает концепцию идеального математического доказательства, исключающего любые сомнения в обоснованности результата, полученного предписанным концепцией способом.

Существенным препятствием на пути формалистской концепции доказательства стало отрицательное решение проблемы разрешимости. Но даже помимо тезиса Чёрча – Тьюринга, возникало сомнение в том, что независимо от проблемы своей реализуемости, формалистская концепция доказательства не просто далека от математической практики, но и попросту нанесла бы вред математике, если была бы принята на вооружение математиками. И. Рав предлагает вообразить фантастическую реализацию формалистского идеала математического доказательства (см.: [Rav, 1999]). Допустим, – заявляет он, – что вместо отрицательного решения А. Тьюрингом и А. Чёрчем общей проблемы разрешимости, было найдено ее положительное решение. Более того, оно было воплощено в компьютере с поэтическим именем Пифагория (образованным слиянием двух примечательных имен – Пифия и Пифагор): «Подумайте, как замечательно все стало бы. Вы хотите узнать, истинна ли гипотеза Римана, просто введете ее (используя подходящий язык программирования), и за долю секунды на вашем экране появится надпись “истинно” или “ложно”. <...> Как только вы набрали формулировку проблемы Ферма, тут же долгожданный ответ появится на вашем волшебном экране, без разрушающей ваш мозг помощи со стороны Эндрю Уайлса» [Rav, 1999. P. 5–6].

Такое фантастическое развитие событий обернулось бы, по мнению И. Рава, подлинной смертью математики. Для него дело математика состоит не столько в установлении истинности или ложности математических утверждений, сколько в создании методов, понятий и средств для решения математической проблемы, которые много важнее достигаемого в итоге доказательства ответа на вопрос об истинности утверждения. Подтверждения приоритета средств решения математической проблемы над установлением истинности утверждения могут быть легко найдены в хорошо известных событиях из исто-

рии математики. Например, история многочисленных безуспешных попыток доказательства проблемы Гольдбаха оказывается зачастую историей создания необычайно мощных методов и концептуальных средств, позволивших получить важные результаты в теории чисел. Аналогичной является история поиска решения очень многих известных проблем математики ¹.

Возражения против концепции математического доказательства, согласно которой последнее может быть представлено в качестве последовательного механического совершения шагов вывода, например, выполняемых Пифагорией, формулируется И. Равом в форме противопоставления двух понятий – концептуального доказательства и вывода. Первое, соответствующее практике математика, обладает нередуцируемым семантическим содержанием, тогда как второе является синтаксическим объектом данной формальной системы. Синтаксический вывод служит абстрактным образцом математического доказательства, по крайней мере он начинает играть эту роль по ходу интеграции в научное сообщество, поскольку постоянно фигурирует в учебной литературе и является предпочтительным при изложении полученных результатов. В явном виде концепция вывода формулируется следующим образом: в формализованной теории T вывод является конечной последовательностью формул в языке теории T , каждый член которой является либо логической аксиомой, либо аксиомой теории T , или является результатом применения конечного числа явно установленных правил вывода к предшествующим формулам в последовательности. Именно таким образом вымышленная Пифагория устанавливает истинность или ложность задаваемых ей вопросов.

Понятие концептуального доказательства является семантическим и не поддается дефиниции. И. Рав утверждает, что отношение между доказательством и выводом аналогично отношению между нетехническим термином эффективно вычислимой функции и техническим термином частично рекурсивной функции. Тезис Чёрча служит своеобразным мостом между интуитивным и техническим понятием вычислимости. Аналогично, так называемый тезис Гильберта, согласно которому любое доказательство может быть преобразовано в формальный вывод в соответствующей формальной системе, является мостом между концептуальным доказательством и выводом. Но в последнем случае мост оказывается с односторонним движени-

¹ См. подтверждение этого в связи с историей решения проблем Гольдбаха и континуум-гипотезы у того же И. Рава [Rav, 1999].

ем: согласно тезису Гильберта, мы можем любое доказательство представить в качестве синтаксического вывода; но не существует способа восстановить первоначальное доказательство со всем его семантическим содержанием из вывода. Щедрый на метафоры и смелые сравнения И. Рав предлагает еще одну аналогию. Соотношение концептуального доказательства и вывода подобно отношению фотографии человека и его рентгеновского снимка; доказательство – это обычная фотография, вывод – это рентгеновский снимок. Мы не можем, имея в своем распоряжении рентгеновский снимок, реконструировать облик человека; точно так же мы не можем по структуре логического вывода реконструировать семантическое доказательство.

Акцент на семантической природе математического доказательства является типичным для обсуждения различия между логическим выводом, выступающим идеалом рассуждения, и практикой работающего математика. Действительно, как правило, указание на имеющиеся различия между идеализированным логическим выводом и выводом математическим сопровождается констатацией того факта, что в отличие от математического вывода логический вывод не ограничен никакой предметной сферой и является универсальным, тогда как математический вывод существенно связан с предметной областью. Семантика предполагает соотнесение терминов и предметной области и в случае философии математики традиционно служит источником онтологических построений.

Неустранимость семантики математического доказательства, невозможность ее редуцирования к синтаксическому выводу в качестве очевидного своего объяснения может иметь платонистскую концепцию математики. Неустранимость семантики доказательства, его связь с предметной областью легко представимы в качестве очередной формулировки тезиса о неустранимости математики из описания реальности. Речь идет об указании того факта, что применимость языка математики к описанию эмпирической реальности может быть объяснена посредством допущения существования определенного рода абстрактных объектов, описанием которых и занята математика, в отличие от логики, не имеющей связи с предметной сферой и в силу этого не знающей ограничения на применение вывода. Хорошо известную историкам науки, да и непосвященной публике, тенденцию математизации естествознания, набирающую силу с момента эпохи Нового времени, проблематизировал в своем широко известном выступлении Е. Вигнер. В нем он констатировал удивительную плодотворность использования математического аппарата в фундаментальных физических теориях и заявил о непостижимости этого фе-

номена. Одной из первых реакций на заявление Е. Вигнера явилось убеждение в том, что объяснение применимости математики в естественных науках должно волновать не столько физиков, которые могут ограничиться выражением восхищения и удивления, сколько философов, ибо является подлинно философской проблемой. И философски интересным феномен применимости математики становится именно в силу того, что предположения онтологического характера – предположение об объективном существовании математических сущностей – кажутся вполне естественной реакцией на удивительную плодотворность математики в описании фундаментальной структуры мира. Применение математики эффективно в силу того, что помимо электронов, кварков, гравитационных полей и прочих сущностей, постулируемых успешной научной теорией, существуют функции, множества, трансфинитные числа и прочие математические сущности, референция к которым производится используемыми при формулировке научных теорий математическими терминами. Философы математики отнесутся к аргументу о применимости именно таким образом. Х. Филд, одна из самых колоритных фигур в философии логики и математики, назовет этот аргумент единственным ему известным «прямым» аргументом в пользу признания существования математических объектов [Fild, 1980. P. viii].

Традиционно У. Куайну и Х. Патнэму [Putnam, 1979] приписывается первенство в экспликации философской значимости, отмеченной Е. Вигнером роли математики в эмпирических науках. Формулировка ими аргумента о неустраимости математики из языка естественнонаучной теории самими авторами непосредственно связывается с реалистской позицией в онтологии математики. В общем виде аргумент Куйна – Патнэма может быть представлен следующим образом.

1. Мы вынуждены признать онтологические обязательства по отношению к тем и только тем сущностям, которые неустраимы из наших успешных научных теорий.

2. Математические сущности неустраимы из наших успешных научных теорий.

3. Мы обязаны признать онтологические обязательства по отношению к математическим сущностям.

Фактически аргумент говорит о том, что поскольку математические утверждения в составе фундаментальных научных теорий позволяют предсказывать и точно описывать такие феномены, предсказание которых было бы невозможным без использования математических теорий, мы обязаны признать существование математических сущностей, указываемых используемыми математическими

понятиями. Поясняя свою позицию по отношению к реалистской интерпретации онтологии математики в связи с ее эффективностью при описании эмпирической реальности, сами авторы поясняют, какая именно часть математики влечет онтологические обязательства. Так, Х. Патнэм говорит о «теоретико-множественных “нуждах” физики», признавая онтологические обязательства по отношению ко всем сущностям, постулируемым аксиоматизируемой теорией множеств. Вместе с тем все те области математики, которые непосредственно не используются при описании эмпирической реальности, сами, тем не менее, приложимы к тем областям математики, которые, в свою очередь, входят в состав естественно-научного знания. Открытым остается вопрос о том, достаточно ли такого опосредованного участия в описании реальности для возникновения онтологических обязательств. Несмотря на весьма любопытную проблему, встающую в связи с этим, возможность своеобразной «транзитивности» онтологических обязательств непосредственно не связана с обсуждаемым статусом аргумента о неустраимости. Интересующие нас посылки аргумента о неустраимости математики лежат в несколько ином направлении.

Несмотря на «очевидность» такого онтологического решения проблемы применимости математики, выявление философской значимости аргумента необходимо начать с прояснения используемых в нем понятий. Прежде всего, в уточнении нуждается само понятие применимости. Несмотря на свою кажущуюся ясность и однозначность, оно содержит возможность разных толкований: «В силу того, что существует много смыслов “применения” и “применимости”, существует много вопросов о применимости математики, которые должны были быть, но не были различены философами. В результате мы не всегда знаем, в чем заключается проблема, с которой мы имеем дело» [Steiner, 1998. P. 1]. Фактически применимость математики в естественных науках включает в себя не одну, а множество проблем, которые кроются во многообразии интерпретаций понятия применимости. Так, применение математического языка в рассуждениях об эмпирической реальности сразу ставит два вопроса: вопрос о логико-семантической форме и вопрос о метафизических предпосылках таких рассуждений. Проблема логико-семантической формы встает в силу того, что в языке математики слова для обозначения чисел функционируют как имена собственные, тогда как в описании эмпирической реальности они часто функционируют как прилагательные: «Эта неопределенность, кажется, делает невозможным рассуждения об эмпирической ситуации с использованием математики» [Ibid.].

Семантическая проблема применимости заключается в возможности объяснить функционирование математических терминов в качестве имен собственных в различных контекстах. М. Стейнер считает, что эта проблема была успешно решена Г. Фреге, согласно которому математические термины указывают не на абстрактные сущности, а на эмпирические понятия. Иная проблема встает в связи с дескриптивной интерпретацией понятия применимости: во многих случаях математика играет решающую роль в совершении успешных предсказаний; в этой связи проблема заключается не в том, что математика может быть использована для формулировки физических законов, а в том, как математика, развивающаяся согласно собственным – «эстетическим», по терминологии М. Стейнера, – канонам, может играть решающую роль при выявлении структуры реальности. Именно дескриптивное понимание применимости непосредственно связано с онтологической проблематикой, и именно такое понимание применимости математики будет интересовать нас в дальнейшем.

В подобном же уточнении нуждается понятие неустранимости, используемое при формулировке как уточняющее по отношению к понятию применимости. Несмотря на то, что У. Куайн не употребляет понятие «неустранимость», а использует более каноническую формулировку тезиса, говоря о квантификации успешных научных теорий, именно это понятие используется для уточнения характера применимости математики к описанию эмпирической реальности, и сама характеристика математики как неустранимой из научной теории стала уже канонической. Фактически аргумент У. Куайна настаивает на том, что использование в словаре научных теорий математических утверждений является существенным, и они не могут быть устранены: невозможно так переаксиоматизировать научные теории, содержащие математические утверждения, чтобы устранить референцию (или квантификацию) к математическим сущностям, и получившаяся в результате теория сохранила бы все атрибуты успешной научной теории, такие как предсказательная возможность, простота, изящность и пр. Именно неустранимость как фундаментальная характеристика способа функционирования математических предложений в составе физической теории заостряет указные выше логико-семантический и метафизический аспекты проблемы применимости математики: математический язык не просто присутствует в составе теории как один из возможных способов описания эмпирической реальности, выбор которого обусловлен субъективными соображениями – например, удобством использования или исключительной определенностью словаря. Напротив, в свете аргумента о неустранимости, само на-

личие математической формулировки теории характеризуется как необходимое, неизбежное условие успешности физической теории. Необходимость использования математического языка для описания эмпирической реальности при этом обосновывается онтологически: если математика является неотъемлемой частью наших наиболее успешных естественно-научных теорий, то мы обязаны допустить существование класса математических сущностей, обращение к которым необходимо для успешного описания физической реальности и содержательности математического доказательства как такового.

Признание содержательности и несводимости к синтаксическому выводу математических утверждений характерно не только для противников тезиса Гильберта, вроде И. Рава. Так, Дж. Аззуни [Azzouni, 2004], критикуя Рава за излишний драматизм противопоставления математического и логического выводов, признает неустранимость семантики из математического доказательства, подчеркивая, что лишись математика спекуляции о разного рода математических объектах, она существенно потеряла бы не только свою содержательность, но и какую-либо привлекательность, само соотношение двух типов вывода характеризует иначе: «я рассматриваю доказательство как указывающее на “лежащий в основании” вывод» [Ibid.]. Семантический характер математического вывода обусловлен, согласно Дж. Аззуни, указанием на математические объекты, а эпистемологическим следствием его является способ установления согласия сообщества в отношении обоснованности математического вывода.

Объяснение семантической природы математического вывода онтологией математической теории, хотя и представляется естественным, нам кажется слишком «тяжелым»: большое число метафизических концепций привлекается для объяснения эпистемологических различий между математическим и логическим выводами. Участники дебатов о природе интересующего нас различия иллюстрируют свои рассуждения прекрасными примерами из истории математики, наглядно демонстрирующими справедливость аргументов. Но наряду с этим, помимо убедительных исторических иллюстраций, являющихся примерами отличия математического и формального выводов, редко можно встретить тщательный анализ характеристик обоих выводов, идущих дальше, чем, скажем, констатация различия в области применения математического и формального выводов. Сомнения в том, что анализ онтологии математической теории может служить источником окончательного объяснения природы логического и математического выводов и их соотношения начинают формулироваться в современной литературе, содержащей в себе попытки заменить

онтологическую «парадигму» решения проблемы эпистемологической (см., например: [Hamami, 2018; Leitgeb, 2009]). Именно последняя, на наш взгляд, в большей степени способна пролить свет на классическую проблему соотношения математического доказательства и логического вывода.

Список литературы

Azzouni J. The derivation-indicator view of mathematical practice // *Philosophia Mathematica*. 2004. Vol. 12. No. 3. P. 81–105.

Field H. Science without numbers. A defense of nominalism. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980.

Hamami Y. Mathematical inference and logical inference // *The Review of Symbolic Logic*. 2018. No. 1. P. 1–40.

Kreisel G. The formalist-positivist doctrine of mathematical precision in the light of experience // *L'Âge de la Science*. 1969. No. 3. P. 17–46.

Leitgeb H. On formal and informal provability // *New Waves in Philosophy of Mathematics*. Eds. Ø. Linnebo, O. Bueno. New York: Palgrave Macmillan, 2009. P. 263–299.

Putnam H. What is mathematical truth? // *Putnam H. Mathematics matter and method: Philosophical papers*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979. Vol. 1. P. 60–79.

Rav Y. Why Do We Prove Theorems? // *Philosophia Mathematica*. 1999. Vol. 7. No. 3. P. 5–41.

Steiner M. The applicability of mathematics as a philosophical problem. Harvard Univ. Press, 1998.

Материал поступил в редколлегию 09.07.2018

A. V. Khlebalin

*Institute of Philosophy and Law SB RAS
8 Nikolaev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

sasha_khl@mail.ru

LOGICAL AND MATHEMATICAL INFERENCE: SYNTAX AND SEMANTICS OF PROOF

The paper treats the relation between mathematical and logical inferences in mathematics and analyses an ontological approach for explaining the

indispensability of the semantic content from mathematical proof. It was shown that such an approach entails serious metaphysical commitments, that is why it is concluded that the epistemological approach is preferable in explaining the nature of the difference between the formal and mathematical inferences.

Keywords: semantics, ontology of mathematical theory, epistemology of mathematical proof.

References

Azzouni J. The derivation-indicator view of mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, 2004, vol. 12, no. 3, p. 81–105.

Field H. *Science without numbers. A defense of nominalism*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1980.

Hamami Y. Mathematical inference and logical inference. *The Review of Symbolic Logic*, 2018, no. 1, p. 1–40.

Kreisel G. The formalist-positivist doctrine of mathematical precision in the light of experience. *L'Âge de la Science*, 1969, no. 3, p. 17–46.

Leitgeb H. On formal and informal provability. *New Waves in Philosophy of Mathematics*. Ø. Linnebo, O. Bueno (eds.). New York, Palgrave Macmillan, 2009, p. 263–299.

Putnam H. What is mathematical truth? *Putnam H. Mathematics matter and method: Philosophical papers*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1979, vol. 1, p. 60–79.

Rav Y. Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, 1999, vol. 7, no. 3, p. 5–41.

Steiner M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*. Harvard Univ. Press, 1998.