УДК 165
DOI 10.25205/2541-7517-2018-16-1-5-19

В. В. Целищев [1, 2], А. О. Костяков [2]

[1] *Институт философии и права СО РАН*
ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия

[2] *Новосибирский государственный университет*
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия

Leitval@gmail.com

ПОЛНОТА ЛОГИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ: ВИДЫ И СПЕЦИФИКА [*]

Рассматривается расширение понятия полноты логической системы. Предполагается, что общепринятая практика соотнесения понятия полноты в основном с логикой первого порядка обязана чисто историческим обстоятельствам. Показано, что при использовании логики первого порядка в качестве средства математического теоретизирования полнота логической системы не отражает важных особенностей применения логики к математике. Продемонстрировано, что различение дедуктивной, семантической и дескриптивной полноты приводит к новому пониманию роли и природы логики.

Ключевые слова: логика, полнота, дескриптивная полнота, теорема Гёделя, математическое теоретизирование.

Формализация математического мышления с помощью строгого логического языка подразумевает полноту соответствующей логической системы. Между тем само понятие полноты подвержено различного рода модификациям в применении к разным логическим и математическим системам. Так, Дж. Коркоран предлагает обоснования для свойств логической системы, таких как слабая полнота, сильная полнота, дедуктивная полнота [1]. Само понятие полноты требуется, по крайней мере, для нескольких целей, которые в тот или иной мо-

---

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-18-10359).

[1] *Corcoran J.* Interview: http://www.academia.edu/t/a-lvz4b5f-1qsq5/34661634.

мент выступают доминирующими в логико-математических исследованиях. В частности, для интерпретируемого формального языка должна быть возможность формулировки гипотез, признаваемых истинными или ложными. Кроме того, требуется формулировать предпосылки для обоснования этих гипотез, и наконец, важно формулировать сами аргументы.

При реализации первой цели мы, прежде всего, заинтересованы в понятии тавтологии, или общезначимых утверждений, и потому логические системы ориентированы на кодификацию тавтологий. В этом случае имеется в виду понятие слабой полноты. Этот подход связан, конечно же, с логицизмом, одним из следствий которого является сведение математических истин к логическим. Именно логические истины должны быть формализуемы так, чтобы каждой математической содержательной истине соответствовала тавтология формальной системы. Наилучшим образом такое понимание полноты свойственно логическим системам Г. Фреге, Б. Рассела и У. Куайна.

Реализация второй цели связана с формализацией действительных аргументов, используемых при применении логики к математике. Здесь уже на первый план выступает то, что называется собственно логикой, или логикой первого порядка. Последняя призвана кодифицировать язык математического теоретизирования. Выделение логики первого порядка из класса логических систем как базисной логики было произведено Д. Гильбертом. Полнота этой системы была доказана К. Гёделем, и именно этот вид полноты Коркоран называет сильной. А. Тарский свободно использует понятие иерархии языков, каждый член которой обладает такой полнотой.

Реализация третьей цели связана с пониманием логики в более широком смысле, который включает эпистемические и прагматические аспекты. В частности, помимо строго сформулированных правил вывода и задания аксиом при формализации требуется убедительность аргументации при выводе следствий из посылок. Фактически речь идет о кодификации «естественных» способов логического вывода в математической аргументации. Соответствие между содержательными и формальными истинами обеспечивает дедуктивную полноту. Такого рода полнота имеется в виду в логических системах Г. Генцена и дедуктивном представлении математического знания у Н. Бурбаки.

Коль скоро в качестве одного из требований формализации дедуктивного знания выступает полнота, особое внимание привлекает дуальное к нему понятие, т. е., феномен неполноты формальной системы и особенно следствия неполноты в отношении получаемого знания. Понятия полноты и неполноты формальной теории оказались в центре внимания практически одновременно. В 1930 г. Гёдель опубликовал доказательство полноты узкого исчисления предикатов, и в следующем, 1931 г. – доказательство неполноты формальных системы математики *Principia Mathematica* [Whitehead, Russell, 1911–1913] и родственных ей систем. В сознании значительной части философов закрепилось убеждение, что упомянутые выше полнота и неполнота являются практически контрадикторными понятиями. Между тем это существенно разные понятия, относящиеся к разным областям, а именно, к логике и математике. Хотя целью *Principia Mathematica* была реализация логицистского проекта, согласно которому математика сводима к логике, уже к концу 1920-х гг. стало ясно, что можно говорить о «разделении труда» между собственно логикой и собственно математикой. Под первой имелась в виду логика первого порядка, а под второй – теория множеств. Оформление логики первого порядка как базовой логики относят к выходу в 1928 г. книги Гильберта и Аккермана «Основы теоретической логики». Формализация же собственно математического дискурса представляла надстройку над базовой логикой аксиомами теории множеств Э. Цермело. В *Principia Mathematica* вся работа по формализации осуществлялась в рамках логики высших порядков, по крайней мере, логики второго порядка. Разделение труда заключалось в том, что собственно логикой стали называть логику первого порядка, а все остальное уже математикой. Хотя логика второго порядка многими исследователями считается вполне адекватной в качестве оснований математики [Гильберт, Аккерман, 2010], другие исследователи относятся к ней с подозрением, крайнее выражение которого – трудно переводимый на русский язык афоризм У. Куайна, согласно которому логика второго порядка является волком в овечьей шкуре (волком в данном случае оказывается теория множеств, а овечкой – собственно логика): другими словами, логика второго порядка на самом деле является уже неявной теорией множеств [Куайн, 2008].

Основной недостаток логики второго порядка состоит в том, что она неполна. В то же самое время логика первого порядка полна и помимо этого обладает массой других добродетелей, среди которых занимают важное место непротиворечивость, компактность и относительно безобидная в философском отношении аксиоматика, без квантификации предикатов [Read, 1994]. Номиналистический оттенок логики первого порядка приветствуется тем же Куайном, провозгласившим, что такая логика вполне достаточна для многих целей, включая экспликацию некоторых философских понятий и доктрин: *First-order logic is logic enough*. Однако в отношении такой роли логики первого порядка есть и скептики. Так, Я. Хинтикка пишет:

> Принятая логика первого порядка обычно рассматривается как наша основная логика или, по крайней мере, как *единственная* логика кванторов. Когда я однажды выразил сомнение в таком статусе обычной логики первого порядка как верной репрезентации логики обыденного языка видному представителю философии языка, он посмотрел на меня с комичным ужасом, воскликнув: «В философии больше не осталось ничего святого» [2014. С. 30].

Полнота логики первого порядка призвана обеспечить кодификацию интуитивно истинных утверждений математики, и в этом смысле ее задача состоит в механическом перечислении истинных предложений. Если все истины логической системы перечислены с использованием этой процедуры, тогда речь идет о семантической полноте системы. При этом логика понимается как метод доказательства, и тогда вопрос о полноте упирается в то, что воздействует на наше понимание доказательства.

Если ориентироваться на действительные методы доказательства, на первый план выступает понятие логической константы, функционирование которой и определяет способ доказательства. Достаточный произвол в трактовке логической константы, который можно наблюдать в обосновании логических систем, означает невозможность говорить о полноте логической системы как цели дедукции. Произвол проявляется в учете прагматических соображений о зачислении логических выражений в разряд логических констант. От прагматических принципов выбора логических констант легко перейти к взгляду, что такой выбор определяется систематическими коммуникативными целями научного дискурса. Но еще более радикальная точка зрения состоит в том, что создатель логической системы сам может выбирать, какие именно выражения полагать константами [Gomez-Torrento, 2002]. При этом зачастую производится демаркация между логикой и математикой, со всеми следствиями о природе полноты в этих областях.

При формализации дедуктивного дискурса используются два рода понятий – семантические, связанные с понятием истины, и синтаксические, связанные с понятием чисто логического исчисления. Теорема Гёделя о полноте логики первого порядка говорит о том, что чисто логические истины могут быть схвачены синтаксическими методами. Это как раз то, что ожидалось от собственно логики, и по этой причине доказательство Гёделя не вызвало какого-то особого резонанса. Важно понимать, что этот вид полноты относится к логической системе. Но логика призвана, как уже упоминалось выше, кодифицировать математическое размышление, и тогда возникает вопрос, в какой степени этот вид полноты применим к математическим формальным теориям, в основании которых лежит логика первого порядка. Поэтому от комбинации логики с математикой ожидалась демонстрация полноты математических систем. Такая полнота отвечала бы платонистскому видению математики как науки, описывающей объективный мир математических сущностей и истин. Кроме того, доказательство такой полноты утвердило бы логику первого порядка подлинной логикой математического размышления. В частности, это особенно подчеркнуло бы важную роль логики в аксиоматизации математических теорий. Исторически полем подобного рода попыток были признаны, среди прочих, аксиоматизации Гильбертом элементарной геометрии и аксиоматической теории множеств. Но в результате доказательства Гёделем теорем о неполноте даже элементарная теория чисел оказалась неполной.

Неполнота формализованной элементарной теории чисел была доказана Гёделем довольно сложным образом, с использованием методов кодирования синтаксических структур. В этой связи возникает вопрос, что именно ответственно за неполноту математической теории – сама природа этой теории, т. е. в общем случае математика, или же средства логики, которые используются в математическом теоретизировании? И быть может, стоит различать понятие неполноты для собственно логических систем и для математических теорий, использующих логику?

Я. Хинтикка полагает, что мы имеем дело с тремя понятиями полноты, которые соотносятся по-разному с чисто логическими системами и формальными математическими теориями, основанными на логических системах [Hintikka, 1996. P. 91–92]. Во-первых, это дескриптивная полнота, которая является свойством нелогической системы аксиом. В этом смысле это понятие полноты относится к успешной аксиоматизации математической теории. При такой аксиоматизации все содержательные истины теории схвачены выводимыми из аксиом формальными аналогами. В теоретико-модельных терминах это означает, что аксиоматическая теория имеет только намеренную модель, и дескриптивная полнота означает категоричность аксиоматической системы, т. е. изоморфизм всех ее моделей. Уже из этого факта можно сделать некоторые выводы о неприменимости понятия дескриптивной полноты к логике первого порядка, поскольку последняя обладает нестандартными моделями. Следует отметить очень важное обстоятельство: понятие дескриптивной полноты не обращается к методам доказательства, так что сама дедуктивная функция логики тут играет незначительную роль.

Там, где дедуктивные методы по-настоящему становятся важными, мы имеем дело с дедуктивной полнотой. Это свойство нелогической системы аксиом в основу которой положены определенные методы формального логического доказательства. Оно означает, что исходя из системы аксиом можно доказать посредством логики для каждого утверждения Ф соответствующего языка либо само *F*, либо его отрицание $\neg F$. Здесь мы имеем дело уже с аксиоматизацией самой логической системы, которая кладется в основания формализации содержательной математической теории. Наконец, мы имеем дело с семантической полнотой, которая важна при рассмотрении более сложных логических систем.

Итак, у нас есть два понятия полноты, связанные с различными аксиоматизациями. Одна из них – это аксиоматизация собственно математической теории, вторая – аксиоматизация логики, являющейся средством строгого теоретизирования в математическом дискурсе. Препятствием на пути к четкому различению этих двух видов аксиоматизаций, и стало быть, полноты, является представление о формальном доказательстве математических утверждений как едином процессе, где сплавлены воедино как собственно логика, так и формальная математика.

> Необходимость в четком осознании среди философов и математиков [подобного рода различений] демонстрируется тем фактом, что различие между двумя полностью различными видами полноты редко формулируется явно… Они не только различны; они являются предметом «взаимного торга» друг с другом. Осуществление [полноты] в одном смысле делает трудным осуществление [полноты] в другом смысле [Hintikka, 1998. P. 68–69].

В самом деле, пусть дано предложение *F*, которое определяет класс моделей $M(F)$. Если ужесточить некоторым образом отношение «быть моделью предложения» таким образом, чтобы сузить число моделей до класса $N(F)$, так чтобы $N < M$, тогда мы будем иметь $N(F) \subseteq M(F)$. Практически это означает, что схватывание содержательных математических истин формальными становится проще, поскольку область схватываемого становится меньше. Хинтикка задает вопрос, что происходит при этом с дедуктивной задачей уже собственно логики? Если некоторое предложение *G* будет следствием предложения *F* перед сужением класса моделей, тогда мы имеем $M(F) \subseteq M(G)$. Но это влечет $N(F) \subseteq N(G)$. Но второе утверждение не влечет первого. Это означает, в свою очередь, что в результате указанного выше сужения придется «схватывать» логическими аксиомами больше отношений логического следования и логических истин, т. е. реальное усложнение дедуктивной задачи [Hintikka, 1998. P. 68–69].

Наконец, семантическая полнота означает, что все общезначимые предложения соответствующего языка могут быть получены в качестве теорем из так называемых аксиом этой системы логики посредством правил вывода. Существует полная аксиоматизация логики, только и если только множество логически истинных предложений рекурсивно перечислимо.

Естественно, что при такой диверсификации понятия полноты требуется уточнение, какого рода неполнота имеется в виду в теоремах о неполноте Гёделя. Обычная интерпретация Первой теоремы состоит в том, что для достаточно богатой формальной системы элементарной арифметики существует такое предложение, которое истинно, но не доказуемо в этой системе. Коль скоро речь идет об истинном утверждении, кандидатом на соответствующее понятие полноты является либо семантическая полнота, либо дескриптивная полнота. Однако существующие неясности в резонах относительно истинности так называемого Гёделева предложения заставляют усомниться в этих видах полноты как тех понятиях, о которых идет речь в Первой теореме Гёделя [Raatikainen, 2005]. Имея в виду то обстоятельство, что первоначальное доказательство Гёделя было чисто синтаксическим, т. е. без упоминания понятия истины, остается предположить, что Гёдель имел дело с дедуктивной полнотой, которая отрицается в теореме. Другими словами, формальная элементарная арифметика дедуктивно неполна. Но это не значит, что остальные виды полноты (неполноты) выпадают из рассмотрения, потому что они тесно увязаны между собой. Взаимосвязь подобного рода является довольно тонкой, поскольку в исходном теоретизировании самого Гёделя она не предстает полностью анализированной.

Теорема Гёделя о неполноте арифметики, вопреки широко распространенному мнению, не говорит о том, что при формализации содержательной математики ускользают от формального представления определенные истины. Схватывание истин адекватным образом делает формализацию дескриптивно полной. Но теорема вовсе не утверждает дескриптивной неполноты, ограничиваясь дедуктивной неполнотой. Это обстоятельство, как указывалось выше, часто упускается из виду. Причина этого в том, что дедуктивная полнота теории *S* требует двух вещей: (а) семантической полноты фрагмента лежащей в основе теории логики, и (б) дескриптивной полноты теории *S*. Если оба вида полноты не обеспечены, тогда не обеспечена и дедуктивная полнота. Обнаруженная Гёделем неполнота может быть обязана двум факторам – (а) и (б). Его метод доказательства не специфицирует, какой именно фактор ответственен за дедуктивную неполноту формальной элементарной арифметики [Hintikka, 1998. P. 70].

В этом контексте важнейшее значение имеет семантическая полнота узкого исчисления предикатов, которую Гёдель доказал как раз перед доказательством Первой теоремы о неполноте. Потому что в случае другой логики, которая семантически неполна, результат о неполноте Гёделя не является абсолютным. Если мы говорим об «упущенной» истине при формализации элементарной арифметики, значит, мы имеем в виду дескриптивные полноту и неполноту. При таком толковании Первая теорема должна утверждать, что невозможно достичь дескриптивной полноты элементарной арифметики. Однако Хинтикка меняет порядок следования тезисов и говорит о реальном содержании Первой теоремы Гёделя: если достигается дескриптивная полнота элементарной арифметики, тогда лежащая в ее основании логика должна быть семантически неполна. Другими словами, дескриптивная полнота достигается только ценой семантической неполноты.

Здесь лежит водораздел между двумя стратегиями в отношении трактовки полноты (и соответственно, неполноты) в формализации математики. С одной стороны, можно предпочесть дескриптивно полную теорию некоторой математической теории, но уже с неполной лежащей в основании логикой. С другой стороны, можно предпочесть неполную математическую теорию, в основании которой лежит семантически полная логика. Хинтикка полагает, что математики предпочитают первый вариант, а философы увлечены перспективами второго варианта [Ibid. P. 71]. С точки зрения реального математического исследования неполнота зиждется уже в логике. Сложнейшее доказательство Гёделя неполноты элементарной арифметики, с этой точки зрения, есть следствие семантической полноты логики первого порядка. Более того, элементарная арифметика является «следующим» по сложности этапом в иерархии полноты и неполноты математических теорий.

Такая точка зрения, пропагандируемая Хинтиккой, встречает возражение, основанное на другом взгляде на природу неполноты математических теорий. Ведь фактически Хинтикка полагает, что полнота логики первого порядка является в некотором смысле отягчающим обстоятельством в математическом теоретизировании, приводящим, в частности, к неполноте математических теорий, в основе которых лежит логика первого порядка. Вопрос заключается в том, проявляется ли феномен неполноты в тех формализованных теориях, которые используют гораздо более скромные логические средства формализации математической теории.

Действительно, довольно скромными средствами можно показать, что эффективно аксиоматизируемая теория может быть эффективно перечислима, что и является выражением полноты теории. Это относится к дедуктивным свойствам теории. С другой стороны, можно показать, что истины некоторого языка, достаточно выразительного в отношении арифметики, не могут быть эффективно перечислимы, что является свидетельством неполноты теории. Это опять-таки относится к дедуктивным свойствам теории. Оказывается, что для обнаружения феномена неполноты достаточно важной характеристики теории, а именно ее обоснованности. Эффективно аксиоматизируемая теория обоснована, если все ее теоремы истинны. Естественно, при этом предполагается, что основные арифметические понятия могут быть выражены в языке теории. Формулируя в своей книге теорему 6.3 «Если *T* есть обоснованная эффективно формализуемая теория, чей язык достаточно выразителен, тогда *T* не является полной [в дедуктивном смысле]», П. Смит замечает:

> Удивительно! Мы уже достигли теоремы об арифметической неполноте. И заметим, что мы не можем латать *T* добавлением истинных аксиом или более богатой логики, сохраняющей истинность, пытаясь обеспечить полноту, продолжая при этом сохранять эффективно аксиоматизируемую теорию. Потому что исправленная теория *T'* все еще будет обоснованной, все еще будет иметь достаточно выразительный язык, и поэтому (если она остается эффективно аксиоматизируемой) не может быть полной… Великий математик Пауль Эрдёш воображал себе Книгу, в которой Бог хранил самые четкие и элегантные доказательства математических теорем. [Теорема 6.3] наверняка входит в эту Книгу [Smith, 2013. P. 48].

Другим подтверждением того, что, вопреки диагнозу Я. Хинтикки, математики могут опираться на логику первого порядка, является дедуктивная неполнота так называемой арифметики Робинсона *Q* [Lukas, 1999. P. 145–146]. Эта теория представляет собой формализацию основных аксиом арифметики без аксиомы индукции, что делает данную систему весьма слабой теорией арифметики. Несмотря на эту слабость, оказывается, что *Q* является достаточно сильной для доказательства всех формул о разрешимых свойствах индивидуальных чисел. Это свидетельствует о том, что традиционная логика кванторов не «виновна» в феномене неполноты.

Дедуктивный аспект в математике находит свое полное выражение в механическом выведении теорем из аксиом. Однако дедуктивный аспект математики при всей его важности не представляет собой всей математики, поскольку аксиоматизация может использоваться для описания «математической реальности» при платонистском взгляде или же для создания моделей при концептуалистском взгляде на природу математики. Дедуктивный аспект имеет прямую связь с комбинаторным представлением математических концепций, но если отказаться от такого представления, тогда станет понятно, что дедуктивная неполнота не является наиболее важным видом неполноты, потому что математик по большей части занят поиском обозрения всех моделей данной теории, а не ее дедуктивных следствий. Такого рода деятельность не опирается на специфичность дедуктивных средств, находящихся в распоряжении математика, специфичность, столь важную при установлении ограничительных теорем.

При обсуждении природы арифметической истины более важное значение имеет не то обстоятельство, какие дедуктивные средства находятся в нашем распоряжении, а то, в какой степени мы понимаем соотношение моделей и математических утверждений. Другими словами, более важным вопросом о формальной аксиоматической системе является вопрос об обладании ею дескриптивной полнотой. Отказ видеть различие двух видов полноты приводит к преувеличению роли теоремы Гёделя о неполноте. Действительно, доказательство теоремы Гёделя о неполноте является конструктивным, и по этой причине может быть сформулировано без упоминания этого понятия вообще. В лучшем случае, мы можем сказать, что гёделевский результат лишь утверждает, что целое множество арифметических истин не может быть перечислено, одна истина за другой, машиной Тьюринга. В этом смысле в последнее время все чаще говорят, что теоремы Гёделя принадлежат теории вычислимости, а не собственно математической логике. Действительно, значимость теорем Гёделя определяется в большой степени тем обстоятельством, что последующие за его результатом исследования были связаны с применением логики к компьютерным технологиям. Вычислительные методы и теория алгоритмов проникли в когнитивную психологию и теорию искусственного интеллекта. Оказалось, что эти методы не могут полностью «схватить» те феномены, которые они призваны описать.

Именно этой ситуации присуща неполнота. Однако перенос этой ситуации на общее обсуждение природы арифметической истины кажется неоправданным. Смысл теоремы Гёделя состоит в указании на дедуктивную неполноту арифметики. Это значит, что в попытке чисто дедуктивной трактовки элементарной арифметики мы обречены на поиск наилучших приближений к изучаемой «математической реальности» вычислительными средствами. Но это вряд ли может быть отнесено к дескриптивной деятельности как попытке описывать математическую реальность другими средствами.

Такое решение относительно роли теоремы Гёделя о неполноте – следствие убеждения, что неполнота является скорее логическим, нежели математическим феноменом. Это различие находит подтверждение в следующем факте. Пятый постулат Евклида в аксиоматизации геометрии может считаться неразрешимым предложением, а сама геометрия с четырьмя постулатами неполна. Но эта неполнота является дескриптивной и может быть устранена добавлением к исходной системе аксиом либо утверждения, либо отрицания неразрешимого предложения. На этом пути мы получаем различные виды неевклидовой геометрии. Тут мы имеем дело с реальным математическим исследованием «математической реальности», настолько адекватным, что многие полагают геометрию физической теорией пространства, а не математической теорией. А вот в случае дедуктивной неполноты добавление неразрешимого предложения к исходной системе аксиом не устраняет появления нового неразрешимого предложения. Причина этого в том, что произвольное Гёделево предложение, добавленное к исходной аксиоматической системе, не обеспечивает последнюю моделью, а значит, в такой новой аксиоматической системе не будет и понятия истинного утверждения. Вопрос о семантической полноте или неполноте системы попросту не встает, коль скоро не определено понятие общезначимости или валидности.

Но если можно сформулировать понятие истины в модели, тогда для системы хорошо подобранных аксиом можно надеяться на получение дескриптивной полноты. «Хорошо подобранная» система аксиом означает адекватное описание «математической реальности», и при таком описании нет необходимости обращаться к понятию дедуктивной полноты или неполноты. Все зависит от наличия в распоряжении предиката истины. Однако согласно ограничительной теореме Тарского понятие истины не может быть определено без обращения к более сильному метаязыку, будь то логика высших порядков или же теория множеств. При этом можно унаследовать все те неприятности, которые присущи теории множеств с ее парадоксами.

Но теория множеств является слишком сильным «орудием», и когда мы говорим об элементарной арифметике, относительно которой установлен результат Гёделя, можно избежать всех неприятностей в одном отношении. В случае формализации элементарной арифметики можно избежать той структуры, которая лежит в основе получения дедуктивной неполноты.

Действительно, какой язык используется для формализации арифметики? Это язык первого порядка, который признан «каноническим языком». А если использовать другие языки, то возможно ли, во-первых, определить предикат истины, а во-вторых, получить дескриптивную полноту системы? Многие исследователи полагают, что наилучшей кандидатурой для оснований математики является логика второго порядка [Shapiro, 1991]. Другой вариант состоит в том, что есть и другие языки, которые по своим выразительным возможностям выполняют работу языка первого порядка, но не являются дедуктивно полными. Тем не менее они могут позволить получить дескриптивную полноту. Такой способ избран Я. Хинтиккой в его концепции дружественно-независимой логики [Hintikka, 1996].

Есть еще важное обстоятельство, которое изрядно «обесценивает» ограничительный аспект ограничительных теорем. Для адекватности описания математической реальности формальная система должна быть категоричной, т. е. все ее модели должны быть изоморфными. Но формулировка элементарной арифметики на базе логики первого порядка не дает категоричности, т. е. не имеет структуры, образованной натуральными числами (со сложением и умножением) в качестве единственной своей модели. Так что дедуктивная неполнота в свете этого не является таким уж важным обстоятельством, если иметь в виду, что главная цель математической активности состоит описании структуры «математической реальности». Неудача в таком описании означает дескриптивную неполноту теории. Но такая неудача никак не связана с дедуктивной неполнотой, и, скажем, в случае элементарной арифметики это является почти прямым следствием компактности логики первого порядка.

Для понимания относительной независимости двух понятий – дедуктивной и дескриптивной неполноты теорий – следует принять во внимание, что существуют дескриптивно неполные, но дедуктивно полные теории (например, поле действительных чисел). Если теория действительных чисел некатегорична, тогда для нее есть неизоморфные модели, и тогда задача математика в открытии «математической реальности» действительных чисел становится затруднительной, поскольку не очень понятно, как отделить «действительные» действительные числа от «недействительных». Этот случай является весьма показательным, поскольку и объекты изучения важны, и дедуктивная полнота не оказывается такой уж важной по сравнению с целями математической деятельности.

Несмотря на выделение различных видов неполноты, надо признать, что теоремы Гёделя о неполноте указывают на ограничения в наших возможностях при нахождении дедуктивных способов обращения со структурами, с которыми имеют дело системы аксиом. Ограничения состоят в том, что это не может быть сделано механически. Отсюда может быть сделано два вывода. Один из них – пессимистический – высказывается большей частью философов математики. Он состоит в том, что теорема Гёделя накладывает существенные ограничения на возможности человеческого мышления. Другой – более оптимистический – состоит в том, что надо искать новые дедуктивные методы, которые отнюдь не исчерпаны логикой первого порядка.

Список литературы

Гильберт Д., Аккерман Р. Основы теоретической логики. 2-е изд. М.: URSS, 2010.

Куайн У. Философия логики. М.: Канон+, 2008.

Хинтикка Я. О Гёделе. М.: Канон+, 2014.

Gomez-Torrento M. The Problem of Logical Constants // Bulletin of Symbolic Logic. 2002. Vol. 8. No. 1. P. 1–37.

Hintikka J. The Principles of Mathematics Revisited. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. P. 91–92.

Hintikka J. Is There Completeness in Mathematics After Gödel? // Hintikka J. Language, Truth and Logic in Mathematics. Dordrecht: Springer, 1998. P. 62–83.

Lukas J. R. Conceptual Roots of Mathematics. London: Routledge, 1999.

Raatikainen P. On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems // Revue Internationale de Philosophie. 2005. No. 4 (234). P. 513–534.

Read S. Thinking about Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994.

Shapiro S. Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic. New York: Oxford Univ. Press, 1991.

Smith P. An Introduction to Gödel's Theorems. Second Edition. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.

Whitehead A. N., Russell B. Principia Mathematica. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1911–1913. Vol. 1–3.

Материал поступил в редколлегию 25.01.2018

V. V. Tselishchev [1, 2], A. O. Kostjakov [2]

[1] *Institute of Philosophy and Law, SB RAS*
8 Nikolaev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

[2] *Novosibirsk State University*
1 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

Leitval@gmail.com

COMPLETENESS OF LOGICAL AND MATHEMATICAL FORMAL SYSTEMS: TYPES AND SPECIFICS

The article deals with the expansion of the concept of the completeness of a logical system. It is assumed that the generally accepted practice of correlating the concept of completeness primarily with the logic of the first order is due to purely historical circumstances. It is shown that when using first-order logic as a means of mathematical theorizing, the completeness of the logical system does not reflect the important features of the application of logic to mathematics. It is demonstrated that the distinction between deductive, semantic and descriptive completeness leads to a new understanding of the role and nature of logic.

Keywords: logic, completeness, descriptive completeness, Gödel's theorem, mathematical theorizing.

References

Gomez-Torrento M. The Problem of Logical Constants. *Bulletin of Symbolic Logic*, 2002, vol. 8, no. 1, p. 1–37.

Hilbert D., Ackermann R. *Osnovy teoreticheskoi logiki* [*Fundamentals of Theoretical Logic*]. Moscow, URSS, 2010. (In Russ.)

Hintikka J. *The Principles of Mathematics Revisited*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1996, p. 91–92.

Hintikka J. Is There Completeness in Mathematics After Gödel? *Hintikka J. Language, Truth and Logic in Mathematics*. Dordrecht, Springer, 1998, p. 68–69.

Hintikka J. *O Gödele* [*About Gödel*]. Moscow, Kanon+, 2014. (In Russ.)

Lukas J. R. *Conceptual Roots of Mathematics*. London, Routledge, 1999.

Quine W. *Filosofiya logiki* [*Philosophy of Logic*]. Moscow, Kanon+, 2008. (In Russ.)

Raatikainen P. On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems. *Revue Internationale de Philosophie*, 2005, no. 4 (234), p. 513–534.

Read S. *Thinking about Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic.* Oxford, Oxford Univ. Press, 1994.

Shapiro S. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. New York, Oxford Univ. Press, 1991.

Smith P. An *Introduction to Gödel's Theorems. Second Edition*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2013.

Whitehead A. N., Russell B. *Principia Mathematica.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1911–1913, vol. 1–3.