УДК 165.1
DOI 10.25205/2541-7517-2019-17-1-17-29

Концепции интенсиональности математического дискурса: этапы самореференции

В. В. Целищев, А. В. Хлебалин

Институт философии и права СО РАН
Новосибирск, Россия

Аннотация

Рассматриваются причины появления интенсиональных структур в математическом дискурсе на примере доказательства Второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики. Показано, что одной из причин интенсиональности является концептуальная структура, включающая переход от строго математических формулировок к их интерпретации. Анализируются три этапа интенсиональности – кодирование, конструирование предиката доказуемости и построение самореферентного предложения. Показано, что допустимость на каждом этапе выбора между альтернативами есть источник интенсиональности.

Ключевые слова

интенсиональность, Вторая теорема Гёделя о неполноте, самореферентность, арифметизация синтаксиса, Гёдель

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-011-00518)

Для цитирования

Целищев В. В., Хлебалин А. В. Концепции интенсиональности математического дискурса: этапы самореференции // Сибирский философский журнал. 2019. Т. 17, № 1. С. 17–29. DOI 10.25205/2541-7517-2019-17-1-17-29

Conceptions of Intensionality of Mathematical Discourse: The Stages of Self-reference

V. V. Tselishchev, A. V. Khlebalin

Institute of Philosophy and Law SB RAS
Novosibirsk, Russian Federation

Abstract

The article discusses the reasons for the emergence of intensional structures in mathematical discourse with the example of the proof of the Second Gödel Theorem on the incompleteness of arithmetic. It is shown that one of the reasons for intensionality is the conceptual structure, including the transition from strictly mathematical formulations to their interpretation. Three stages of intensionality are analyzed – coding, constructing a predicate of proof, and constructing a self-reference sentence. It is shown that the choice between the alternatives at each stage is the source of intensionality

Keywords

intensionality, Gödel Second Incompleteness Theorem, self-reference, syntax arithmetization, Gödel

Acknowledgements

The Investigations are supported by Russian Fondation for Fundamental Studies (project no. 19-011-00518)

For citation

Tselishchev V. V., Khlebalin A. V. Conceptions of Intensionality of Mathematical Discourse: The Stages of Self-Reference. *Siberian Journal of Philosophy*, 2019, vol. 17, no. 1, p. 17–29. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-7517-2019-17-1-17-29

Математический дискурс, по общему признанию, является экстенсиональным. Формализация дискурса утверждает это убеждение с непреложностью, присущей строгой логике. Действительно, структура формальной математики, в ее теоретико-множественном виде, представляет собой «двухслойную» конструкцию, в основании которой лежит логика первого порядка, над которой надстроена аксиоматическая система собственно математических структур. В отношении объектов теории множеств важное место занимает, в той или иной форме, аксиома экстенсиональности. «Каноническая» логика У. Куайна, запечатленная в афоризме ‘first-order logic is logic enough’ [2008], в качестве одного из своих краеугольных камней предполагает экстенсиональность логики. Эти два обстоятельства, как будто, полностью определяют экстенсиональность математики.

Согласно историцистским концепциям науки, от Т. Куна [2003] до И. Лакатоса [1995], возникающие в ходе развития научной теории аномалии свидетельствуют о возможном грядущем пересмотре ее базисных концепций. Появление в математике примеров откровенно интенсионального толка в определенном смысле можно считать такого рода аномалией. Эти аномалии могут быть незначительными отклонениями, которые легко устраняются концептуальными средствами, но в некоторых случаях они могут иметь более важный характер. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики является видным результатом метаматематики, имеющим важнейшие следствия как собственно математического толка, так и философских интерпретаций в области программ оснований математики и природы математического мышления. Так что обнаружение интенсионального характера Второй теоремы Гёделя, если и считать его аномалией, говорит о необходимости разговора об интенсиональности математического дискурса как важной его характеристике.

Как и полагается аномалиям, их возникновение является феноменом, представляющим интерес в контексте методологии науки. Они возникают медленно, как бы нехотя подвергая сомнению устоявшиеся представления. Поскольку такие представления зачастую освящены авторитетом и сопровождаются определенного рода научной мифологией, становление новых идей сопряжено с социологическими обстоятельствами и историческими казусами. В этом смысле Вторая теорема Гёделя является превосходной иллюстрацией этого процесса. Устоявшиеся взгляды на историю метаматематики гласят, что Вторая теорема является следствием Первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики; изначальным источником этого убеждения является исторический факт, согласно которому один из немногих математиков, понявших значение результатов Гёделя, Дж. фон Нойман, сразу увидел, что неразрешимым гёделевым предложением Первой теоремы может быть утверждение о непротиворечивости соответствующей формальной системы. Как гласит опять-таки история, когда фон Нойман сообщил о своем соображении Гёделю, тот спокойно ответил ему, что он знает об этом. После этого эпизода, по слухам, фон Нойман потерял интерес к основаниям математики и собственно логике.

Не очень расписываемым в учебной литературе было обстоятельство, о котором как будто все знали, что сам Гёдель никогда не доказывал Второй теоремы, сославшись на то, что доказательство не представит особых трудностей. Однако потребовалось некоторое время, чтобы П. Бернайс осуществил доказательство, в частности для написания второго тома фундаментального труда по основаниям математики [Гильберт, Бернайс, 1982], главным соавтором которого числится Д. Гильберт. Некоторая ирония ситуации заключалась в том, что сам Гильберт не принял результата Гёделя, хотя решающим фактором в доказательстве Второй теоремы явились так называемые правила выводимости Гильберта – Бернайса. Опять-таки, согласно слухам, эти правила явились результатом долгих разговоров Бернайса с Гёделем во время их океанского вояжа на пароходе в Америку. Разработка важных дополнительных средств в виде этих правил свидетельствовала о том, что Вторая теорема не является тривиальным следствием Первой теоремы и претендует на статус отдельного важного результата. Впоследствии Вторая теорема стала популярной как через извлечение ее важных философских следствий, так и через зачастую искажение ее содержания и просто злоупотребления в ходе всякого рода неквалифицированных спекуляций относительно этого содержания [Franzen, 2005]. Однако специфика доказательства Второй теоремы по сравнению с Первой теоремой, ее «аномальный» характер, не стала предметом исследований вплоть до начала 1960-х. В некотором роде это объяснялось спокойствием самого Гёделя, который перешел к другим проблемам, и следованием авторитету, свойственным научному сообществу. К вопросу об особом характере Второй теоремы Гёдель вернулся спустя три десятка лет, будучи давно поглощен скорее философскими, нежели математическими проблемами.

Между тем различие этих двух типов проблем действительно повлияло на то, что привлечение внимания к феномену интенсиональности математики в значительной степени запоздало. Объяснение этого факта кроется в различии интересов философски настроенных умов и «технически» ориентированных математиков в отношении к важной проблеме, возникшей в связи с самореферентными конструкциями Гёделя. Так называемое «гёделево» неразрешимое предложение, интерпретируемое как истинное, но не доказуемое, использует идею самореферентности, говоря о себе: «Я не доказуемо». Этот вид лингвистической самореферентности отличен от самореферентности, используемой в Теореме Рекурсии. К. Сморински отмечает:

> Наиболее выпуклой особенностью этой противоположности является мизерность [публикаций] первого вида по сравнению с изобилием второго. Как это можно объяснить? Объяснение может быть на многих уровнях. Можно предположить, что формальная лингвистическая самореферентность интересует философски настроенных логиков, а математически ориентированных логиков привлекает функциональная самореферентность, и поскольку математики более заинтересованы в техническом развитии, было бы естественно ожидать большего развития в области Теоремы Рекурсии и соответствующих теоретических обобщениях [Smorynski, 1991. P. 110–111].

В другом месте Сморински выражается по этому поводу более красноречиво:

> Моя любимая теория состоит в том, что развитию препятствовала неуверенность перед лицом философских проблем. Как бы то ни было, развитие теории рекурсии также оказало существенное негативное влияние. Во-первых, отчасти благодаря работе Гёделя, быстрое развитие теории рекурсивных функций благодаря Клини отвлекло внимание от лингвистических аспектов теорем о неполноте. (Фрейдистские приверженцы теории неуверенности в себе даже выдвинули бы тезис о том, что это обеспечило «безопасный» выход интереса к неполноте и неразрешимости) [Smorinski, 1981. P. 355].

Как бы то ни было, самореферентность гёделева предложения была выделена самим Гёделем, и тогда остается решить, было ли это выделение простым эвристическим средством для облегчения понимания весьма сложной конструкции, как это считается многими исследователями, или же это была намеренная, как в техническом, так и обыденном смысле слова, интерпретация неразрешимого предложения. В первом случае можно считать, что эвристика сослужила плохую роль, поскольку, строго говоря, это не является самореференцией, как опять-таки сейчас считают исследователи, а во втором случае мы имеем дело со скольжением в интенсиональность контекста.

Интенсиональность обеих теорем Гёделя о неполноте воспринимается многими математиками как вопиющая, обязанная не столько математической практике, сколько метаматематике, в частности, искусственной конструкции Гёделя. Часто указывается на то, что «простая» неразрешимость математического утверждения не имеет прямой связи с гёделевым неразрешимым предложением, утверждающим свою собственную недоказуемость. Идеальным вариантом разрешения этой дилеммы было бы нахождение неразрешимого утверждения из реальной математики, которое было бы не просто аналогом гёделева предложения, и полным его воплощением в математической практике. Среди кандидатов на такое утверждение фигурируют теорема Гудстейна [Goodstein, 1944] и результат Кирби и Париса [Kirby, Paris, 1982], хотя в этом отношении существуют определенные сомнения.

Но если Первая теорема трактует не совсем обычным образом неразрешимость математических утверждений, не впадая в радикальную интенсиональность, то гораздо более откровенный интенсиональный характер проявляет Вторая теорема Гёделя о неразрешимости утверждения о непротиворечивости формальной системы. При строго экстенсиональной семантике Вторая теорема Гёделя окажется ложной, а поскольку эта теорема имеет весьма жесткие следствия относительно громкой Программы Гильберта в основаниях математики, следует исходить из того, что Вторая теорема Гёделя о неполноте является значимым математическим (и не просто метаматематическим) фактом. Самое меньшее, что тут можно сделать, это признать недостаточность экстенсиональной семантики. Более сильное утверждение состоит в необходимости интенсиональной семантики. В любом случае требуется объяснение феномена интенсиональности в математическом дискурсе.

Имеется несколько подходов к объяснению интенсиональности гёделевской конструкции. Прежде всего, причиной интенсиональности, по Ауэрбаху [Auerbach, 1985], может быть большой зазор между собственно математическим результатом и переводом его на обыденный язык. Это справедливо для обоих результатов о неполноте Гёделя. Д. Ауэрбах начинает свою аргументацию с математической формулировкой результата о неполноте арифметики с системы Робинсона Q, который формулируется так:

> (1) Не существует непротиворечивой полной аксиоматизации расширения Q.

Утверждение (1) является доказуемым математическим результатом.

Понимание этого утверждение связано с некоторого рода переводом, который апеллирует к несколько другой системе концепций, и по общему согласию сообщества логиков, (1) может быть переведено в следующее утверждение:

(2) Любая достаточно сильная формальная система арифметики неполна.

Понимание в данном случае подразумевает, что (2) является «выражением» того, что имеется в виду при утверждении (1). Здесь ключевым термином является «выражение», и тогда обоснованность перевода (1) в (2) зависит от того, в каком смысле (2) «выражает» (1), если они не являются синонимичными: если (1) есть чисто математическое утверждение, то (2) явно не является таковым. Таким образом, мы имеем дело с переходом (или переводом) математического утверждения на язык, не являющийся полностью математическим. Мы полагаем этот перевод верным, а саму схему перевода вполне обоснованной, хотя она связывает математически точное предложение с предложением, в котором точность и определенность математического толка отсутствует. Но именно на такого рода схемах перевода зиждется не только философская интерпретация математических результатов, но и, как было упомянуто ранее, общее понимание математических результатов в более широком контексте.

Сюрприз преподносит такой перевод в случае Второй теоремы о неполноте Гёделя. Ее общее понимание далеко превосходит по значимости в этом более широком контексте математическую формулировку. Действительно, «пользователям» математической логики хорошо известен результат о невозможности доказательства непротиворечивости формальной системы средствами самой системы. Чуть более аккуратно это явно не чисто математическое положение имеет следующий вид:

(3) Если T есть достаточно сильная формальная система арифметики, тогда любое предложение в T, говорящее, что T непротиворечиво, не выводимо в T.

Но что в данном случае может служить аналогом утверждения (1) для поддержки (2)? Очевидно, им должна стать Вторая теорема о неполноте, выполняющая роль исходного утверждения при переводе в (3). Но в данном случае, это не будет тривиальным переводом, поскольку (3) не будет достаточно тривиальным следствием Второй теоремы, в отличие от случая Первой теоремы.

Требуются основания для того, чтобы считать (3) толкованием, или интерпретацией Второй теоремы. Схема перевода Второй теоремы в (3), как оказалось, требует особого внимания в виде формулировки дополнительных посылок. Природа этих посылок выявляется различием Первой и Второй теорем о неполноте. Схемы перевода в обоих случаях разные, и интенсиональная природа Второй теоремы проявляется по контрасту с Первой теоремой. Первая теорема Гёделя была доказана им путем арифметизации метатеоретического утверждения, провозглашающего свою собственную недоказуемость. Вторая теорема говорит об еще одном недоказуемом утверждении, которое есть арифметизация метатеоретического утверждения непротиворечивости системы.

Философское различение двух теорем ввел С. Феферман [Feferman, 1960]. Его различение (именно он ввел термины «интенсиональное» и «экстенсиональное» при прочтении теорем) касалось не собственно теорем, а того, как они переводились на обыденный язык. Если Первая теорема не представляла особых проблем в этом отношении, то понимание Второй теоремы этим образом неявно подразумевало, с его точки зрения, комплекс предположений о природе техник арифметизации.

Таким образом, помимо самой идеи перевода, источником интенсиональности оказалась гёделева техника арифметизации. Впрочем, эти два источника оказываются одинаковыми по духу, потому что арифметизация вносит те усложнения в перевод, которые и делают его источником интенсиональности. Действительно, арифметизация является полезным способом конструирования предложений с желаемыми условиями доказуемости, но при этом не нужно думать, что математическая формула означает ту же вещь, что и предложение, которое она арифметизирует.

Каковы основные ингредиенты интенсиональности, привносимые процедурой арифметизации? В. Холбах и А. Виссер говорят о трех источниках интенсиональности, которые взаимозависимы, будучи стадиями одного и того же процесса арифметизации: кодирования предложений языка числами, определения формулы для выражения определенного свойства и, наконец, конструирования из этой формулы самореферентного предложения [Halbach, Visser, 2014]. На каждой стадии делается выбор, который определяет выбор на остальных стадиях. Именно здесь появляется интенсиональность: если различный выбор приводит к разным результатам, и конструирование самореферентного предложения при соответствующем выборе должно осуществляться с осторожностью, тогда это уже не произвольная процедура, а процедура с «умыслом». Другими словами, она не сводится к чисто экстенсиональным операциям, а является интенсиональной.

Какого рода осторожность тут имеется в виду? Кодирование должно быть удачным в том смысле, что от выбранного варианта зависит то, будет ли арифметическая формула приписывать синтаксическое свойство самой себе. Мало того, удачный выбор кодирования позволяет обойти сложности конструирования самореферентного предложения, поскольку диагонализация, необходимая для этого, уже встроена в схему кодирования. Ясно, что удачный выбор не есть чисто технический трюк, поскольку предусматривает получение именно нужного результата. Холбах и Виссер делают любопытное замечание о целенаправленности выбора, замечая:

> Ведет ли такой способ кодирования к подлинно самореферентным утверждениям, есть другой деликатный вопрос [Halbach, Visser, 2014. P. 674].

Это замечание призвано подчеркнуть, с нашей точки зрения, интенсиональность самой процедуры кодирования.

Что касается второй стадии интенсиональности, то тут поднимается тонкий вопрос, что означает выражение арифметической формулой определенного синтаксического свойства. В данной статье мы не обсуждаем эту тему; отметим только, что попытки Г. Крайзеля [Kreisel, 1953] дать экстенсиональное определение этого понятия не считается многими исследователями удовлетворительным, и потому интенсиональность понятия выражения является в определенной степени вынужденным шагом.

Третий этап интенсиональности, конструирование самореферентного предложения, которое канонизировано гёделевским диагональным методом, выражается в том, что и здесь надо проявлять осторожность, преследуя получение подлинной самореферентности. Общий метод не дает уверенности в этом, хотя и тиражирован во многих книгах примерами гёделевых предложений. Как показано в работах П. Милна [Milne, 2007] и Р. Хека [Heck, 2007], некоторые гёделевы предложения не говорят о том, что они не доказуемы.

Таким образом, получение предложения, приписывающего определенное свойство самому себе, предполагает интенсиональность процедуры.

> Ни один из трех этапов не дает однозначного ответа: есть много различных способов Гёделевского кодирования; если задан некоторый из них, каждое свойство, которое может быть вообще выражено некоторой формулой, может быть выражено многими другими

> формулами; и если задано кодирование и свойство, выражаемое формулой, могут быть сконструированы различные неподвижные точки такие, что свойство неподвижных точек доказуемо в теории [Halbach, Visser, 2014. P. 679].

Последнее замечание в этой цитате заслуживает комментария. Неразрешимые предложения, одно из которых было получено Гёделем в виде искусной конструкции, в настоящее время получаются в изобилии техникой неподвижных точек. И само это разнообразие говорит в пользу интенсионального характера результатов о неполноте. Следует все же добавить замечание о различном характере интенсиональности Первой и Второй теорем: чтобы показать, что арифметическая система неполна, требуется только нумерически правильная арифметизация, но чтобы показать, что система, если она непротиворечива, не может доказать свою непротиворечивость, арифметизация должна быть интенсионально корректной.

Упомянутое выше разнообразие формул, выражающих свойство, может быть проиллюстрировано различными способами выражения свойства непротиворечивости в связи с доказательством Второй теоремы [Giaquinto, 2002. P. 196–198].

Как известно, гёделевская конструкция имеет дело с предикатом доказуемости Pr (x,y), который представляет синтаксическое отношение «x есть выведение y». Тогда непротиворечивость системы T можно выразить формулой $\mathrm{CON}_{\mathrm{T}} \equiv_{Df} \forall y \neg [\mathrm{Pr}\ (x, \ulcorner \neg\ 0=0 \urcorner)]$, где $\ulcorner \mathrm{A} \urcorner$ есть гёделев номер A.

Интенсиональность конструкции состоит в том, что предикат доказуемости должен быть интенсионально корректным, поскольку он должен выражать соответствующие синтаксические предикаты. Различие экстенсионального и интенсионального здесь состоит в следующем. Пусть мы имеем предикат $\mathrm{A}(x)$ (для аксиом) такой, что

$\mathrm{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n})$ выводимо в теории T, если и только если «n» есть аксиома T, где «$\boldsymbol{n}$» есть цифра для n, которая есть синтаксический кодируемый объект.

Аналогично строится предикат:

$\mathrm{Pr}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$ выводим в T, если и только если «n» есть T-выведение «m».

При таких условиях можно сконструировать предикат $\mathrm{A}^*_{\mathrm{T}}(x)$ такой, что он будет коэкстенсионален предикату $\mathrm{A}_{\mathrm{T}}(x)$, но интенсионально отличный от него. В то время как $\mathrm{A}_{\mathrm{T}}(x)$ выражает, что x кодирует аксиомы T, $A^*_T(x)$ выражает, что x кодирует аксиомы T (и в дополнение к этому), что для любого предложения код y не больше кода x, а аксиомы T с кодами не больше y образуют непротиворечивое множество. Это вполне естественные «добавления». Если T непротиворечиво, $A_T(x)$ и $A^*_T(x)$ равнообъемны, или коэкстенсивны.

Используя коэкстенсивность этих предикатов, вполне допустимо сконструировать предикат $Pr^*(x, y)$ для представления отношения T-выводимости и затем использовать его для конструирования CON^*_T. Как показал Феферман, CON^*_T выводимо в T [Feferman, 1960. P. 68–69]. Феферман полагает, что это не есть нарушение Второй теоремы о неполноте, аргументируя, что CON^*_T не является выражением утверждения о непротиворечивости T. Но такая аргументация опирается на намерение (Гёделя) выбрать именно правильный предикат, и значит, опирается на интенсиональность в подборе предиката.

Ситуация с интенсиональностью упирается в выразительные средства соответствующего языка при взаимодействии с пониманием роли перевода. В этом смысле представляет интерес интерпретация того, как Феферман избегает заключения о нарушении Второй теоремы о неполноте:

> Согласно Феферману, когда спрашивают, может ли теория T доказать свою собственную непротиворечивость, хотят узнать, есть ли предложение, распознаваемое в T как утверждение о непротиворечивости T, которое может быть доказано в T. Он заявляет, что анализ Второй теоремы Гёделя (для, по крайней мере, наиболее непротиворечивых арифметических систем T) показывает, что ответ на этот вопрос отрицательный. Следовательно, ни одна теорема T не может быть понята как утверждение о непротиворечивости T. В частности, если арифметизация некоторой формулировки непротиворечивости T есть теорема T, тогда ресурсы T неадекватны для определения того, что эта теорема есть утверждение о непротиворечивости T.
>
> Феферман не аргументирует эту точку зрения, полагая ее ясной. Если некоторое доказательство непротиворечивости T может быть формализовано как T-доказательство арифметизации непротиворечивости T, но T не видит доказанную формулу в качестве утверждения собственной непротиворечивости, тогда неверно будет описывать эту ситуацию как то, что T доказывает свою собственную непротиворечивость. Можно сказать, что есть доказательство в T формулы, которая арифметизирует непротиворечивость T, но нет доказательства в T непротиворечивости T (Эдип знает, что по возвращению от Оракула он убьет невооруженного короля Фив, но пока провидец Тересий позднее не раскроет важ-

нейшее тождество, он не узнает, что подтвердил пророчество, убив своего собственного отца) [Franks, 2009. P. 110–111].

Таким образом, проблема интенсиональности поднимает более общие вопросы, чем проблемы кодирования. Гёдель в конце жизни обратился к этой проблеме, назвав свое решение «наиболее общим и лучшим». Но его аргументация поднимает еще более общие вопросы, которые апеллируют к его общему философскому мировоззрению.

Список литературы / References

Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. М.: Наука, 1982. Т. 2: Теория доказательств.
Hilbert D., Bernays P. Osnovaniya matematiki [Foundations of Mathematics]. Moscow, Nauka, 1982, vol. 2. (In Russ.)

Куайн У. Философия логики. М.: Канон+, 2008.
Quine W. V. Filosofiya logiki [Philosophy of Logic]. Moscow, Kanon+ Publ., 2008. (In Russ.)

Кун Т. Структура научных революций. М.: АСТ, 2003.
Kuhn T. Struktura nauchnykh revolutsii [Structure of Scientific Revolutions]. Moscow, AST Publ., 2003. (In Russ.)

Лакатос И. Фальсификация и методология программ научного исследования. М.: Медиум, 1995.
Lakatos I. Falsifikatsiya i metodologiya program nauchnogo issledovaniya [Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes]. Moscow, Medium Publ., 1995. (In Russ.)

Auerbach D. Intensionality and the Gödel Theorems. *Philosophical Studies*, 1985, vol. 48, p. 337–351.

Feferman S. Arithmetization of Metamathematics in General Setting. *Fundamenta Mathematica*, 1960, vol. 49, p. 37–92.

Franks C. The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert's Program Revisited. Cambridge, Cambridge Uni. Press, 2009.

Franzen T. Godel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse. Wellesley, A.K. Peters, 2005.

Goodstein R. On the restricted ordinal theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 1944, vol. 9, p. 33–41.

Halbach V., **Visser A.** Self-Reference in Arithmetic I. *The Review of Symbolic Logic*, 2014, vol. 7, no. 4, p. 671–691.

Heck R. Self-reference and the languages of arithmetic. *Philosophia Mathematica*, 2007, vol. 15, p. 1–29.

Kirby L., **Paris J.** Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bulletin London Mathematical Society*, 1982, vol. 14, p. 285–293.

Kreisel G. On a problem of Henkin's. *Indagationes Mathematicae*, 1953, vol. 15, p. 405–406.

Milne P. On Gödel Sentences and What They Say. *Philosophia Mathematica*, 2007, vol. 15, p. 193–226.

Smorynski C. Fifty Years of Self-Reference in Arithmetic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1981, vol. 22, no. 4. October, p. 357–374.

Smorynski C. The Development of Self-Reference: Lob's Theorem. In: Perspectives on the History of Mathematical Logic. Drucker T. (ed.). Berlin, Birkhäuser, 1991, p. 110–133.

Материал поступил в редколлегию
Received
27.12.2018

Сведения об авторе / Information about the Authors

Целищев В. В., Институт философии и права СО РАН (ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия)

Vitaly V. Tselishchev, Institute of Philosophy and Law SB RAS (8 Nikolaev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation)

kkvvnn@gmail.com

Хлебалин А. В., Институт философии и права СО РАН (ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия)

Alexander V. Khlebalin, Institute of Philosophy and Law SB RAS (8 Nikolaev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation)

sasha_khl@mail.ru